

数学 B 期末試験

2000 年 9 月 26 日
基礎工学部情報科学科

1

$$f(z) = 2xy + i(y^2 - x^2)$$

とする．このとき，コーシー・リーマンの関係式（方程式）を通じて，次の問いに答えよ．

- (1) $f(z)$ が正則であることを示せ．
- (2) $f(z)$ の（複素）導関数を求め， z の関数として表せ

2

a, b を相異なる複素数 C_R を原点 0 を中心とする半径 R の円周とし， $R > |a|, |b|$ とする．このとき，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz$$

を求めよ．ただし，原点 0 を中心に反時計回りを正の方向とする．

3

関数 $F(z)$ および $G(z)$ は点 a で正則， $F(a) \neq 0$ ， $G(z)$ は点 a を 1 位の零点として持つものとする．すなわち， $G(a) = 0$ かつ $G'(a) \neq 0$ とする．このとき，関数 $f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$ について，

$$\text{Res}[f : a] = \frac{F(a)}{G'(a)}$$

が成り立つ事を示せ．

4

半径 $R (R > 1)$ ，中心角 $\pi/2$ の扇形の周全体を C ，扇形の円弧部分を Γ とする．このとき，次の値を順に求めよ．

- (1) $\int_C \frac{z}{z^4 + 1} dz$
- (2) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{z}{z^4 + 1} dz$
- (3) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$