

数学 B 期末試験

2002 年 9 月 17 日

基礎工学部情報科学科 藤原

1

$u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $u(x, y)$ は調和関数であることを示せ．

(2) $u(x, y)$ は実部をもつ正則関数 $f(z)$ を求め， z の関数として表せ．

2

$z = i$ を中心とする半径 3 の反時計周りの円周 $C = \{|z - i| = 3\}$ に対し，積分

$$\int_C \frac{1}{e^z(z - \pi i)^z} dz$$

の値を求めよ．

3

関数 $f(z)$ は複素平面上の領域 D において正則であるとする．単一閉曲線 C とその内部は D にあるとし，点 a はその閉曲線 C の内部にあるとする．このとき，任意の自然数 n に対し，次の等式が成り立つことを示せ．ただし， $f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ の n 階導関数を表す．

$$n! \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz = \int_C \frac{f^{(n)}(z)}{z - a} dz$$

4

$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(z)$ の上半平面における特異点を全て求め，更にその種類を述べよ．極の場合，その位数も明示すること．

(2) (1) で求めた特異点における留数を求めよ．

(3) (1) の結果に基づいて，積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

の値を求めよ．