数学 B　期末試験

2004 年　8 月 10 日

基礎工学部情報科学科　藤原

1

指数関数 $w = e^z$ の実部 $u(x,y)$ および虚部 $v(x,y)$ は任意の点で，コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示し，次式を導け．

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

2

原点の周りに反時計周りに一周する単純閉曲線 C に沿って，次の関数を積分した値を求めよ．

$$\frac{3z+1}{(z+1)^3(z-1)}$$

但し，-1 は C で囲まれた領域の内部にあり，1 は外部にあるものとする．

3

有理関数 $f(z)$ が点 z_0 で k 位の極を持つとき，その留数は次で求められることを示せ．

$$Res(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]$$

4

$f(z) = \frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+a^2}(a>0, \lambda>0)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の上半平面における特異点をすべて求め，更にその種類を述べよ．極の場合，その位数を明示すること．

(2) (1) で求めた特異点における留数を求めよ．

(3) (2) の結果に基づいて，積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+a^2} dx$$

を求めよ．