平成 18 年度 情報数学基礎 (浜口担当分) 中間試験 第1回 問題

[1] $X = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ とする．

(1) べき集合 $\mathcal{P}(X)$ を示せ．

(2) 次の命題の真偽を判定せよ．

(a) $\exists x \in X[x \cap \{a\} = \phi]$

(b) $\forall W \in \mathcal{P}(X)[(W \neq \phi) \Rightarrow \forall x \in W[\{a\} \subseteq x]]$

(3) 次の条件を満足する $Y \subseteq \{a,b,c\}$ をすべて求めよ．ただし、$Q = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$ とする．

$(Y \neq \phi) \Rightarrow (\forall Z \in Q[Y \cup Z = \{a,b,c\}])$

[2] 0 と 1 と 2 からなる n 文字の並びの集合 B_n を考える $(n \geq 2)$．たとえば、$n = 2$ の場合は、$B_2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ である．このとき、次のような関係 $R_n \subseteq B_n \times B_n$ を考える．ここで $x = x_1x_2 \ldots x_n \in B_n$ および $y = y_1y_2 \ldots y_n \in B_n$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$ について $x_i, y_j \in \{0,1,2\}$) であり、$\leq$ は通常の数に対する不等号であるとする．

$$xR_ny \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}(x_i \leq y_i)$$

$n = 2$ の場合は、例えば、$(00, 02) \in R_2, (10, 22) \in R_2, (02, 10) \notin R_2$ となる．この R_n は順序関係となることが示せる．

(1) $n = 2$ の場合のハッセ図を示せ．

(2) $n = 2$ の場合のつぎの集合の上界、極大元、上限、最大元をそれぞれ求めよ (存在しない場合もある)．

(a) $A_1 = \{02, 11, 12, 20, 21\}$

(b) $A_2 = \{00, 01, 10, 11\}$

[3] 同値関係に関する次の問いに答えよ．

(1) $X = \{a, b, c, d\}$ 上の同値関係を考える．最も同値類の数が少なくなるような同値関係 R_c を考えたときの同値類をすべて示せ．また，最も同値類の数が多くなるような同値関係 R_f を考えたときの同値類をすべて示せ．

(2) 集合 Y 上のある同値関係 $R \subseteq Y \times Y$ がさらに反対称性 $(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$ を持つとき，R に関する同値類はすべて1つの要素しか含まないことを示せ（ヒント：2つ以上要素を含む同値類が存在することを仮定して，反対称性を使って矛盾があることを示す）．