2006.6.19 実施

平成 18 年度 情報数学基礎 (浜口担当分) 中間試験 問題

[1] n 個の頂点からなるグラフで頂点 P から頂点 $Q(\neq P)$ に到達可能であるとき、P から Q への長さ $n-1$ 以下の単純な経路が存在することを示せ。

[2] 高さ $h(\geq 0)$ の完全 2 分木とは，2 分木のうち，葉の節点 (外部節点) の深さがすべて h であり，h 未満の深さの葉はもたないような木のことである．

(1) 高さが h の完全 2 分木の頂点数は，合計 $2^{h+1}-1$ であることを数学的帰納法を用いて示せ．

(2) 高さ h の完全 2 分木について，無向辺を 2 本の有向辺とみなして接続行列 A を作る．$C_k = \sum_{i=1}^{k} A^i$ $(k = 1, 2, \ldots)$ と定める．行列 C_k の要素に 0 がひとつもなくなることはありえるか．ありえるとしたら，k がどのような条件をみたすときか述べよ． $\boxed{k=2h}$

木内の最長の長さの時

A : 長さ 1
A^2 : 長さ 2
A^3 : 長さ 3

[3] 無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，次のようにして生成される無向グラフ $G^T=(V^T,E^T)$ を考える．

$$V^T = \{v_e | e \in E\}$$

$$E^T = \{(v_e, v_{e'}) | e, e' \in E \text{ が共通の頂点を含む (=隣接している)}\}$$

たとえば，$V=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1)\}$ であれば，$e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_2,v_3)$, $e_3=(v_3,v_1)$ として，$V^T=\{v_{e_1},v_{e_2},v_{e_3}\}$, $E^T=\{(v_{e_1},v_{e_2}),(v_{e_2},v_{e_3}),(v_{e_3},v_{e_1})\}$ となる．

このとき，頂点数が 4 の (輪なしの) 完全グラフ (ただし無向グラフ)G' に対して同じ操作を行うと，得られる G'^T はどのようなグラフになるか，図示せよ．

[4] 平面上に，まず三角形の領域ができるように 3 本の直線をおく (図 1)．直線を 1 本ずつ加えて n (>3) 本にしたとき，任意の n について，すくなくとも 1 つは三角形の領域が含まれることを示せ．

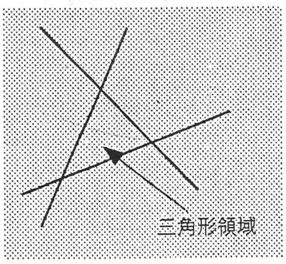

図 1: 3 本の直線で構成される三角形の領域

※ 注意：ここでいう接続行列では，i 行目に対応する頂点 v と j 列目に対応する頂点 u との間に k 本の有向辺があるとき，そのときに限り要素 a_{ij} は k となる．