

平成 19 年度 情報数学基礎 (浜口担当分) 中間試験 第 1 回 問題

[1]  $X = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$  とする.

(1) べき集合  $\mathcal{P}(X)$  を示せ.

(2) 次の命題は真か偽か. 簡単に理由も述べよ.

$$\forall W \in \mathcal{P}(X) [(W = \phi) \vee \forall x \in W [\{1\} \subseteq x]]$$

[2]  $P, Q, R$  を命題とする. 次の論理式の論理的同値を示せ. 同値でない場合は反例を示せ.

$$(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow R) \text{ と } (P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge R)$$

[3] 整数の集合  $N (= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\})$  上の関係  $R$  を次のように定める.

$$xRy \Leftrightarrow x + y \text{ が偶数}$$

(1)  $R$  が同値関係であることを示せ.

(2) 同値類  $[2]_R$  と  $[3]_R$  を示せ. それぞれ無限集合となるが, 特徴がわかるように回答すること.

[4] 集合  $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  を考える.  $k \in X$  に対して,

$$M(k) = \{i \mid i \in X \text{ かつ } i \text{ は } k \text{ の倍数}\}$$

と定める (例:  $M(15) = \{15, 30\}$ ). このとき,  $Y = \{M(1), M(2), \dots, M(30)\}$  上の関係  $R \subseteq Y \times Y$  を次のように定める.

$$M(i) R M(j) \Leftrightarrow M(i) \subseteq M(j)$$

例えば,  $M(6) R M(3)$  となる. この時,  $(Y, R)$  が (半) 順序集合であることが示せる.

(1)  $Y$  に対するハッセ図を示せ. ただし,  $M(i) \subseteq M(j)$  のとき,  $M(j)$  の方が  $M(i)$  より大きいと考えることにする.

(2)  $Z = \{M(2), M(3), M(5)\}$  の上界, 最大元, 極大元, 上限をそれぞれ示せ. ただし, 存在しないこともあり得る. 複数存在する場合は, 全て示せ.

(3) 次の (i) (ii) の命題は真か偽か. 簡単に理由も述べよ.

(i)  $(\forall i \in X)(\forall j \in X)(\exists k \in X)[M(i) \cap M(j) = M(k)]$

(ii)  $(\forall i \in X)(\forall j \in X)(\exists k \in X)[M(i) \cup M(j) = M(k)]$

$$\begin{array}{ccc} \{3, 6, 15, 30\} & \{5, 10, 15, 30\} & \{2, 6, 10, 30\} \\ M(3) & M(5) & M(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{6, 30\} & \{10, 30\} & \{15, 30\} \\ M(6) & M(10) & M(15) \end{array}$$

$$M(30)$$

$$M(1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$M(2) = \{2, 6, 10, 30\}$$

$$M(3) = \{3, 6, 15, 30\}$$

$$M(5) = \{5, 10, 15, 30\}$$

$$M(6) = \{6, 30\}$$

$$M(10) = \{10, 30\}$$

$$M(15) = \{15, 30\}$$

$$M(30) = \{30\}$$

$$M(30)$$