2007.6.25 実施

平成 19 年度 情報数学基礎 (浜口担当分) 中間試験 (2 回目) 問題

[1] $p \geq 2$ とする．高さ h $(h \geq 0)$ の木のうち，深さが h の頂点以外の頂点はすべて p 個の子を持つものを考える (完全 p 分木という)．

高さが h の完全 p 分木の頂点数は，合計 $\frac{p^{h+1}-1}{p-1}$ であることを示せ．

[2] 16 個の頂点からなる (有向の) 輪付き完全グラフ $G = (V, E)$ を考える．$V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{15}\}$ とする．

(1) $V_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ としたとき，制限グラフ $G|V_0$ を描け．

(2) 頂点集合を $V_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $V_1 = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $V_2 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$, $V_3 = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$ に分割する．

このとき，4 つの制限グラフ $G|V_0, G|V_1, G|V_2, G|V_3$ それぞれの辺の集合を E_0, E_1, E_2, E_3 として，新しいグラフ $G' = (V, E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ を考える．

V_i 中の頂点が V_j $(j > i)$ 中の頂点より先に現れるように順序を与えて，それにしたがって接続行列を作るとどのような形になるか．特徴を述べよ．

[3] 閉路をふくまない有向グラフ $G = (V, E)$ を考える．頂点数は n とする．

(1) 他のどの頂点へも到達可能な頂点が存在するとする．このとき，そのような頂点は，ただひとつしか存在しないことを示せ．

(2) (1) のグラフには，出て行く辺がない頂点がすくなくともひとつ存在することを示せ．

[4] n 個の頂点 v_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ をもつ有向グラフ $G = (V, E)$ を考える．E はつぎのように定義されるとする．

$$E = \{(v_i, v_{(i+2) \bmod n}) \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

i 行 j 列の要素が，辺 (v_i, v_j) に対応する接続行列 A を考える．

(1) $n = 5$ および $n = 6$ の場合のグラフをそれぞれ示せ．

(2) A^t (A を t 回かけたもの) が単位行列となる条件を t を使って示せ (n によって場合分けする必要がある)．

※ 注意：ここでいう接続行列では，i 行目に対応する頂点 v と j 列目に対応する頂点 u との間に k 本の有向辺があるとき，そのときに限り要素 a_{ij} は k となる．