数学B (藤原) 試験問題

2007年8月7日

- 問 [1] ~ [4] の各々につき解答用紙1ページを 問題順に 割り当ること.
- すべての問いに対し 解答に至る道筋も要点を押さえて簡潔に記すこと.
- 以下では $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$ とする.

$x^2+ay^2+x(2x)$ = $2axy$ $3x^2+3by^2$

[1] $f(x,y) = x(x^2 + a\,y^2) + (3x^2 + b\,y^2)y\,i$ とする. この時, 次の問に答えよ:

x^3+axy^2 $3x^2y+by^3$ by^3+3x^2

$a=-3$ $b=-1$ (1) $f(x,y)$ が z の関数として正則になるように 実数定数 a, b を定めよ.

(2) $f(x,y)$ が z の関数として正則となる時, $f(x,y)$ を z の関数として表せ.

[2] 曲線 C_1 および C_2 をそれぞれ C_1: $z(t) = t + it$ $(0 \le t \le 1)$, C_2: $z(t) = t^2 + it$ $(0 \le t \le 1)$ とする. この時, 次の積分の値を求めよ:

x^3+ay^2x

$\cancel{3x^2+ay^2}$

$2axy$

$3x^2y+by^3$

$3x^2+3by^2$

(1) $I_1 = \displaystyle\int_{C_1} (z + \bar{z})\,dz$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_{C_2} (z + \bar{z})\,dz$

[3] 次の積分の値を求めよ:

$$\int_{\{|z-1|=4\}} \frac{e^z(z^2+z+1)}{(z-3)^3}\,dz$$

但し, 積分は 円周 $\{|z-1|=4\}$ 上 反時計回りに行うものとする.

[4] $f(z) = \dfrac{z\,e^{iz}}{z^2+1}$ とする. この時, 次の問に答えよ:

(1) 関数 $f(z)$ の上半平面における特異点をすべて求め, 更に その種類を述べよ. 極の場合 その位数も明示すること.

(2) (1) で求めた特異点における留数を求めよ.

(3) (2) の結果に基づいて, 積分: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ.