

1. 次の微分方程式の一般解を求めなさい。

(a) $y' + 3x^2y^2 = 0$

(b) $xy' = x + y$

✓ (c) $y' + 2y = e^x(3 \sin 2x + 2 \cos 2x)$ $u = y^{-1}$

✓ (d) $y' + 2y = y^2$ $u' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{2y - y^2}{y^2} = \frac{2}{y} - 1$
 $= 2u - 1$

(e) $y'' + y' - 6y = 0$

(f) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(g) $4y'' + 4y' + 10y = 0$

(h) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

(i) $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$

(j) $y'' + 4y = 8x^2$

(k) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$

(l) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^3}$

$\chi^m \quad 2m(m-1) - 4m \quad 6\chi^m = 0$

$m(m-1)\chi^m + 4m\chi^m + 6\chi^m$

$(m^2 + (4-1)m + 6)$

$u' - 2u = -1$

$u = e^{\int -2dx} (\int e^{\int -2dx} (-1) dx + C)$

$= e^{-2x} (\int e^{2x} dx + C)$

$= e^{-2x} (\frac{1}{2} e^{2x} + C)$

$= \frac{1}{2} + C e^{-2x}$

$\frac{8}{3} +$

$\therefore z = \frac{2}{1 + C e^{2x}}$

$2x^2 + 2x + 5$

$b -$

$\frac{dz}{dx} = dx$

2. $0 < \alpha < 1$ とするとき、微分方程式の初期値問題 $y' = y^\alpha, x \geq 0, y(0) = 0$ の解は無限にあることを示しなさい。

$(1-\alpha)y^{1-\alpha} = x + C$

3. 区間 $[0, 1)$ 上で 微分方程式の初期値問題 $y' = y^2, y(0) = \frac{1}{2}$ の解が存在するかどうか検討しなさい。

4. 開区間 I 上の微分方程式

(A) $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$

の解 y_1, y_2 に対して ロンスキ行列式を $W(y_1, y_2)(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ と定義する。 $f(x), g(x)$ が連続であるとき、 y_1, y_2 が I 上一次従属であることは、ある $x_0 \in I$ で $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ であることと同値であることを示しなさい。ただし、(A) の解で初期条件 $y(x_0) = K_1, y'(x_0) = K_2$ を満たすものは一意であることを使ってもよい。

$y^{-\alpha}$

$z = 0$

$z = C(x)$

$z = \frac{1}{\alpha+1} z^{\alpha+1} + C$

$C(x)' = z^\alpha$

$y' = y^\alpha$
 $\frac{dy}{dx} = y^\alpha$
 $\frac{1}{y^\alpha} y' = 1$
 $\frac{dy}{y^\alpha} = dx$

$\int_0^x \frac{1}{y^\alpha} dy = \int_0^x dx$

$\frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} = x$

$\left[\frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} \right]_0^x = \left[x + C \right]_0^x$

$C = \frac{1}{1-\alpha}$

$\int \frac{1}{z^\alpha} dz =$
 $\int \frac{1}{z^\alpha} dz$

$\frac{1}{1-\alpha} z^{1-\alpha} - 0 = x = 0$

$x = \frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha}$