'08 数学　A

1. 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(a) $y' + 3x^2y^2 = 0$

(b) $xy' = x + y$

(c) $y' + 2y = e^x(3\sin 2x + 2\cos 2x)$

(d) $y' + 2y = y^2$

(e) $y'' + y' - 6y = 0$

(f) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(g) $4y'' + 4y' + 10y = 0$

(h) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

(i) $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$

(j) $y'' + 4y = 8x^2$

(k) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$

(l) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^3}$

2. $0 < \alpha < 1$ とするとき、微分方程式の初期値問題　$y' = y^\alpha,\ x \geq 0,\ y(0) = 0$　の解は無限にあることを示しなさい。

3. 区間　$[0, 1)$ 上で　微分方程式の初期値問題 $y' = y^2,\ y(0) = \frac{1}{2}$ の解が存在するかどうか検討しなさい。

4. 開区間　$I$　上の微分方程式

(A)
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

の解 $y_1, y_2$ に対して　ロンスキ行列式を $W(y_1, y_2)(x) = y_1y_2' - y_2y_1'$ と定義する。　$f(x), g(x)$ が連続であるとき、$y_1,\ y_2$ が $I$ 上一次従属であることは、ある　$x_0 \in I$ で $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ であることと同値であることを示しなさい。ただし、(A) の解で初期条件　$y(x_0) = K_1, y'(x_0) = K_2$ を満たすものは一意であることを使ってもよろしい。