2009.7.6 実施

平成21年度 情報数学基礎 第2回中間試験問題（伊野担当分）

$\boxed{1}$ 置換に関する次の問いに答えよ．

(1) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ を互換の積で表現せよ．

(2) 長さ n の巡回置換が $n-1$ 個の互換の積で表現できることを示せ．

(3) (2) の性質を使って，置換 : $X \to X$ が s 個の重ならない巡回置換の積で書ければ，$|X|-s$ 個の互換の積で書けることを示せ．

$\boxed{2}$ n 個の頂点からなるグラフで頂点 P から頂点 Q $(\neq P)$ に到達可能であるとき，P から Q への長さ $n-1$ 以下の単純な経路が存在することを示せ．

$\boxed{3}$ 以下，$i, j = 1, 2, 3, 4$ とする．単純有向グラフ $G = (V, E)$（V は頂点の集合，E は有向辺の集合）を考える．V を4つの集合 V_1, V_2, V_3, V_4 に分割する（$V_i \neq \emptyset$ かつ $i \neq j$ なる i と j に対して $V_i \cap V_j = \emptyset$）とき，$E = (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_3) \cup (V_3 \times V_4) \cup (V_4 \times V_1)$ が成立するとする．

(1) G の接続行列を，グラフの特徴がわかるように，ブロック行列を使って示せ．

(2) G 中の閉路の長さは4の倍数となる．理由を説明せよ．

(3) V_i の要素数がどれも等しく n であるとき，G 中に含まれる単純閉路のうち最も長いものの長さはいくらになるか．理由も説明せよ（ヒント：例えば，E が $V_1 \times V_2$ の全ての要素を含んでいることに注意する）．

$\boxed{4}$ 高さ h (≥ 0) の完全2分木とは，2分木のうち，葉の節点（外部節点）の深さがすべて h であり，h 未満の深さの葉を持たない木のことである．

(1) 高さ h の完全2分木の頂点数は，合計 $2^{h+1}-1$ であることを数学的帰納法を用いて示せ．

(2) 高さ h の完全2分木について，無向辺を2本の有向辺とみなして隣接行列 A を作る．$C_k = \sum_{i=1}^{k} A^i$ $(k = 1, 2, \ldots)$ と定める．行列 C_k の要素に0が一つもなくなることはありえるか．ありえるとしたら，k がどのような条件をみたすときか．理由とともに述べよ．