

'09 数学 A

1. 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(a) $e^x y' = 2(x+1)y^2$

(b) $y' + y \tan x = \sin 2x$

(c) $xy' = 2y + x^3 e^x$

(d) $y'' + 9y' + 20y = 0$

(e) $16y'' - 8y' + 5y = 0$

(f) $x^2 y'' + xy' + y = 0$

2. $0 < \alpha < 1$ とするとき、微分方程式の初期値問題 $y' = y^\alpha$, $x \geq 0$, $y(0) = 0$ の解は無限にあることを示しなさい。

3. 区間 $[0, 1)$ 上で 微分方程式の初期値問題 $y' = y^2$, $y(0) = 2$ の解が存在するかどうか検討しなさい。

4. 開区間 I 上の微分方程式

(A) $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$

の解 y_1, y_2 に対して ロンスキ行列式を $W(y_1, y_2)(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ と定義する。 $f(x), g(x)$ が連続であるとき、 y_1, y_2 が I 上一次従属であることは、ある $x_0 \in I$ で $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ であることと同値であることを示しなさい。ただし、(A) の解で初期条件 $y(x_0) = K_1, y'(x_0) = K_2$ を満たすものは一意であることを使ってもよろしい。

5. 次の微分方程式の一般解を求めなさい

(a)

$$y'' + 4y = \sin 3x$$

(b)

$$y'' + y' - 6y = -6x^3 + 3x^2 + 6x$$

(c)

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^3}$$

6. 次の連立微分方程式の臨界点のタイプと安定性を決定しなさい。また、実数値の一般解を求めなさい。

(a)

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_1 - 6y_2 \\ y_2' &= -8y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

7. 次の方程式のべき級数解を求めなさい。

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$