電磁気学 II 問題例　解答

1. 左辺の x 成分について，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A})_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\vec{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\vec{A})_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{A}_x \\
&= (\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A})_x \Delta \vec{A}_x
\end{aligned}$$

他の成分についても同様である．▮

(解説) 基本公式である．各成分で考えることがポイント．定義に則って正確に計算すること．

2. (1) 位置ベクトルが $\vec{r}$ である点の，波の初期位相を表す．また，これが一定値をとるには，全ての点における初期位相が一定であるのが条件である．

(解説) $\vec{k}$ は波数ベクトルで，一次元の波の波数 k を一般化したもの．波の周期を T とすると，等位相面に垂直な (波の進行方向に平行な)$\vec{r}$ 方向の波の形は $\sin(\vec{r}\cdot\frac{2\pi}{T})$ と表現できる．また，任意の $\vec{r}_1$ 方向の波の形は $\sin(\vec{r}_1\cos\theta_1\cdot\frac{2\pi}{T})$ と表現できる．(θ_1 は $\vec{r}$ と $\vec{r}_1$ のなす角) 括弧の中身はいつも，任意のベクトル $\vec{r}$ と，等位相面に垂直で絶対値 $\frac{2\pi}{T}$ のベクトルとの内積であるから，等位相面に垂直で絶対値が $\frac{2\pi}{T}$ のベクトルを波数ベクトル $\vec{k}$ と表すことにすると，波の形はいつも数式 $\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$ と表現できる．

(2) 位置ベクトルが $\vec{r}$ である点の，時刻 t での波の位相を表す．

(3) 時間 $t=0$ において，$\vec{k}\cdot\vec{r}=\alpha$ とする．これはベクトル $\vec{k}$ に垂直な一つの平面を表している．次に，$t=\Delta t$ とすると，$\vec{k}\cdot\vec{r}=\alpha+\omega\Delta t$ は，上の平面に平行な別の平面を表している．つまり，位相 $\vec{k}\cdot\vec{r}=\alpha$ が一定値をもつ平面は，時間 t の経過とともに，$\vec{k}$ の方向に移動していく．いま，$\Delta t=\frac{2\pi}{\omega}=T$ より一周期分離れている．よって求める距離は，波長 λ．

(4) A. 電場 $\vec{E}$ の方向の単位ベクトル．

B.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\
&= \left(e_x^{(1)}k_x + e_y^{(1)}k_y + e_z^{(1)}k_z\right)E_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \\
&= (\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{k})E_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \\
\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left((\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{k})E_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) \\
&= (\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{k})E_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \\
&= (\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{k})E_0\cdot(k_x,k_y,k_z)(-\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)) \\
&= -E_0\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{k}^2E_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\vec{e}^{(1)} E_0 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_0 \vec{e}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\
&= -E_0 \vec{e}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\
&= -E_0 \vec{e}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega^2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\
&= -E_0 \vec{e}^{(1)} \omega^2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\
\left(\Delta - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) &= \Delta\vec{E}(\vec{r},t) - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) \\
&= \left[-\vec{e}^{(1)} E_0 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \epsilon_0\mu_0\omega^2)\right] \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = 0
\end{aligned}
$$

(解説) ややこしいが，$\vec{e}^{(1)} = (e_x^{(1)}, e_y^{(1)}, e_z^{(1)}), \vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ であることに注意して計算する．何で何を偏微分し，どれを定数とみなすのかをよく考えること．$\vec{r}$ は r の関数である．

C. B より，

$$\mathrm{div}\vec{E} = (\vec{e}^{(1)} \cdot \vec{k}) E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = 0$$

同様に

$$\mathrm{div}\vec{B} = (\vec{e}^{(2)} \cdot \vec{k}) B_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = 0$$

(解説) 磁場の波動方程式は $\vec{B} = \vec{e}^{(2)} \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ とおけ，同型である．

D. C より，

$$\vec{e}^{(1)} \cdot \vec{k} = \vec{e}^{(2)} \cdot \vec{k} = 0$$

すなわち，電波と磁波の偏りの方向 $\vec{e}^{(1)}$ と $\vec{e}^{(2)}$ はいずれも，波の進行方向 $\vec{k}$ に直交している．つまり，電磁波は横波である．(ただし，この時点では「どのように」直交しているか不明．)

また，$\vec{e}^{(1)}$ を x 軸，$\vec{e}^{(3)}$ を z 軸にとり，$\vec{e}^{(2)}$ がどの方向になるのか調べる．電波と磁波の波動方程式をファラデーの法則に代入すると，

$$B_0 \vec{e}^{(2)} = \vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(1)} \cdot \frac{E_0}{v_p}$$

となる．ここで，$\vec{e}^{(3)}$ は $\vec{k} = k\vec{e}^{(3)}$ で電磁波の進行方向の単位ベクトルと定義する．

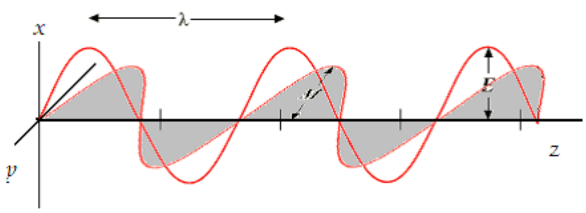
したがって，電波と磁波の振幅の関係は，

$$B_0 = \frac{E_0}{v_p} = \frac{E_0}{c}$$

となる．また，磁波の偏りの方向は，

$$\vec{e}^{(2)} = \vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(1)}$$

である．これを図示すると下図のようになる．



(解説) $\vec{e}^{(1)}$ と $\vec{e}^{(2)}$ の関係は $\vec{k}$(方向は $\vec{e}^{(3)}$ とする) を仲介に分かる．電磁波が横波であることは，以上よりガウスの法則から結論された．

3. (1) 電磁ポテンシャル ϕ と $\vec{A}$ の定義は下記の式．

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

$$\vec{E} \;=\; -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(2) ローレンツ条件は下記の式.

$$\mathrm{div}\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(3) ローレンツ条件下でのマクスウェル方程式は下記の式.

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} &= -\mu_0\vec{i} \\ \left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \mathrm{div}\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

(解説) 以上 (1) から (3) は丸暗記しなくても，導く方針を覚えて置けばよい.

(4) $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ の x 成分をとると，

$$B_x = \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z}$$

ここで，$\vec{A}$ の z 成分と y 成分をとり，微分公式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|^n} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-\frac{n}{2}} \\ &= -n\frac{x-x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^{n+2}}\end{aligned}$$

を利用して微分を求める.

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_V \frac{\vec{i}_z(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' - \frac{\partial}{\partial z}\int_V \frac{\vec{i}_y(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\frac{-(y-y')\vec{i}_z(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{-(z-z')\vec{i}_y(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{i}_y(\vec{r}')(z-z') - \vec{i}_z(\vec{r}')(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\left[\vec{i}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')\right]_x}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\end{aligned}$$

他の成分も同様にして，

$$B(\vec{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$$

(5) $\vec{r}'$ の点にあるそれぞれの電荷からの影響は r 点に達するまでに $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ 秒の遅れがあることを考慮する．r 点では色々な時間・地点にある電荷から届いた影響が足し合わされるので,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{i}(\vec{r}', \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'$$

となる.

4. いま，x 軸上を原点 O を中心に半径 r で振動しているものとする．与式より，$\theta = \frac{\pi}{2}$ の方向，すなわち，荷電粒子の加速度の方向に直角の方向が，最も電磁波のエネルギーの流れが強い方向

である．x 軸の真上から見ると，x 軸を軸として全方向に均等に出ていくように見えるが，横から見ると方向に分布がある．真上・真下には放射されず，水平方向に特に強く放射される．

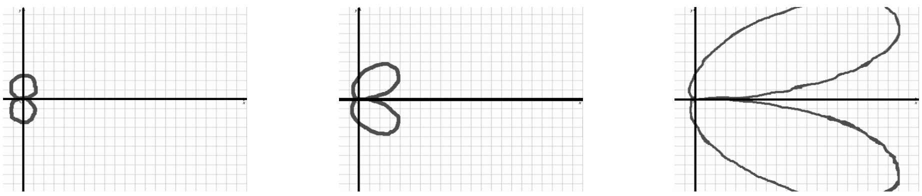
ここで，$\vec{n}$ はを点電荷の位置から観測点の方を向いた単位ベクトル，r を点電荷の位置から観測点までの距離，$\vec{\beta}$ は速度ベクトル，$\dot{\vec{\beta}}$ を加速度ベクトルとすると，

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{S}\right| &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\vec{v}(t_0)}{dt_0}\right)^2\sin^2\theta \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{n}}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^6 r^2}\left[\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

となるので，$\begin{matrix} \vec{n} = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \vec{\beta} = (b,0,0) & \dot{\vec{\beta}} = (a,0,0) \end{matrix}$ とおいて計算するとよく，

$$
k = \frac{x^2y^2+y^4}{\left(1-\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^6 (x^2+y^2)^3}
$$

となる．ただし，a は他の係数などと一緒に変数 k としてまとめている．これで k が一定となる曲線が描ける．



図は左から右へ，速度 $\vec{v}=0$ から増えていったときの電波強度分布図を示している．速度・加速度ベクトルの方向は x 軸である．

(解説) 与式にて，右辺の変数は全て電荷が電磁波を発した過去の時刻の値であるとに注意すること．電荷が移動しながら電磁波を放つときその効果が遠方でどう重なり合うかを計算したい場合にはこのことに注意する必要があるが，今回はある瞬間に電荷からどの方向にどの程度の電磁波が出て行くかを知りたいだけなので，それほど気にする必要は無い．

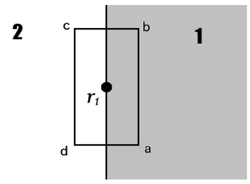
与式を見ると，加速の強さ・方向だけで決まるのではなく，その時の電荷の速度，方向によっても変わってくることが分かる．進行方向に平行または垂直な加速の二通りぐらいをおさえておくとよいだろう．また，この解答では半定量的に求めたが，定性的に求めてもよいかもしれない．

5. 誘電率が ϵ_1 と ϵ_2 の二種類の誘電体が接している場合を考える．

   まず，境界面上の点 $\vec{r}_1$ のまわりに，境界面にまたがった小さな長方形の経路を abcda をとり，物質中の静電場の基本法則

$$
\begin{aligned}
\int_S \left[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\right] dS &= \int_V \rho(\vec{r}) dV \\
\oint_C \left[\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{t}(\vec{r})\right] dS &= 0
\end{aligned}
$$

   を適用する．この狭い領域では境界面を平面とみなしてよい．長方形の二辺 ab とは境界面に平行にとり，境界に垂直な二辺 bc と da は短くする．



境界面の誘電体 1 の側の電場の強さを $\vec{E}_1(\vec{r})$，2 の側の電場の強さを $\vec{E}_2(\vec{r})$ とする．長方形が十分に小さければ，電場は辺 ab 上で一定値 $\vec{E}_1(\vec{r})$，辺 cd 上で一定値 $\vec{E}_2(\vec{r})$ をとると考えてよい．したがって，辺 ab に沿った単位ベクトルを $\vec{t}$，辺 ab の長さを Δs とすれば，

$$\begin{aligned}\int_{ab}\left[\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{t}(\vec{r})\right]dS &= \left[\vec{E}_1\left(\vec{r}_1\right)\cdot\vec{t}\right]\Delta s\\ \int_{cd}\left[\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{t}(\vec{r})\right]dS &= -\left[\vec{E}_2\left(\vec{r}_1\right)\cdot\vec{t}\right]\Delta s\end{aligned}$$

となる．辺 bc と da は短いのでその積分は無視すると，

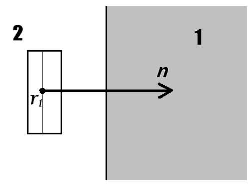
$$\begin{aligned}\oint_{abcda}\left[\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{t}(\vec{r})\right]dS &= \left[\vec{E}_1\left(\vec{r}_1\right)\cdot\vec{t}-\vec{E}_2\left(\vec{r}_1\right)\cdot\vec{t}\right]\Delta s\\ &= 0\end{aligned}$$

となり，境界上の各点において，$\vec{E}_1$ と $\vec{E}_2$ の関係は

$$\underline{\vec{E}_1\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{t}=\vec{E}_2\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{t}}$$

でなくてはならない．$\vec{t}$ は境界面に接する単位ベクトルなので，この関係は境界面の両側で電場の強さの接線成分が等しいことを示している．$\epsilon_1\neq\epsilon_2$ なので，電束密度 $\vec{D}$ については，この関係は成り立たない．

次に，下図のように，境界面上の点 $\vec{r}_1$ にまたがる薄く小さな筒状の立体を考え，それに対してガウスの法則を適用する．底面は境界面に平行で，筒の厚みは十分薄いものとする．



前と同じように，電荷密度は両底面 S_1, S_2 の上で一定値 $\vec{D}_1(\vec{r})$，$\vec{D}_2(\vec{r})$，をとると考えてよい．したがって，面に垂直なベクトルを $\vec{n}$，底面積を ΔS とすれば，ガウスの法則の積分のうち S_1, S_2 からの寄与はそれぞれ，

$$\begin{aligned}\int_{S_1}\left[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r}))\right]dS &= \left[\vec{D}_1\left(\vec{r}_1\right)\cdot\vec{n}\right]\Delta S\\ \int_{S_2}\left[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\right]dS &= -\left[\vec{D}_2\left(\vec{r}_1\right)\cdot\vec{n}\right]\Delta sS\end{aligned}$$

となる．側面は狭いのでそこからの寄与は無視してよい．境界面上の上に真電荷が存在しないとすれば，ガウスの法則の右辺は 0 になるので，

$$\begin{aligned}\int_S \left[\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\right] dS &= \left[\vec{D}_1(\vec{r})\cdot\vec{n} - \vec{D}_2(\vec{r})\cdot\vec{n}\right]\Delta S \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって，電荷密度については境界面上の各点で，

$$\underline{\vec{D}_1(\vec{r})\cdot\vec{n} = \vec{D}_2(\vec{r})\cdot\vec{n}}$$

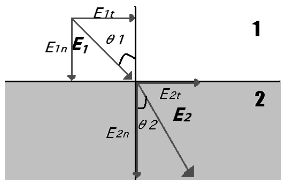
の関係が成り立つ．$\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ なので，電場の強さの垂直成分については，この関係は成り立たない．

したがって，境界面の誘電体 1 の側における電場の接線成分・垂直成分を E_{1t}, E_{1t}，誘電体 2 の側における電場の接線成分・垂直成分を E_{2n}, E_{2n} とすると，

$$\begin{aligned}E_{1t} &= E_{2t} \\ \epsilon_1 E_{1n} &= \epsilon_2 E_{2n}\end{aligned}$$

が成り立つ．▮

ここで，電場が境界面の法線となす角を図のように θ_1, θ_2 とすると，



$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$ であるので，θ_1 と θ_2 の間には，

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

の関係 (屈折の法則，スネルの法則) がある．▮

(解説) cd 上での成分では辺 cd に沿う単位ベクトルは $-\vec{t}$ であることに注意すること．また，$\vec{D}$ と $\vec{E}$ を別々に考えること．