$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の表現論

—最も簡単な半単純 Lie 環の表現論として—

Naoya Enomoto*

2002.11.

§ 目 次

*Kyoto-u,dept.math,mailto:henon@s00x0427.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

§ 1　はじめに

この paper では，$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の表現論について述べます．半単純 Lie 環の表現論においては，$\mathfrak{sl}_2$ の表現論が最も基本的な役割を果たすことが知られています．その理由を端的に言うならば，どんな半単純 Lie 環もルート分解と呼ばれる同時固有分解をもち，それに即して"s-triple"と呼ばれる $\mathfrak{sl}_2$ に同型な部分 Lie 環をたくさん含んでいるからです．ここでは，それよりももう少し複雑ではありますが，それでも最も簡単な半単純 Lie 環の表現論として，$\mathfrak{sl}_n$ の表現論について述べます．

以下では，特に断らない限り，基礎体は標数 0 の代数的閉体とし，表現は有限次元のみを考える．

§ 2　$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

2.1　定義と基本性質

Lie 環 $\mathfrak{sl}_n$ は次で定義される．これは，Lie 群 $SL_n(\mathbb{C})$ の Lie 環として理解することもできるが，ここでは Lie 群の知識は必須というわけではない．

定義 2.1.　$\mathfrak{sl}_n := \{X \in M_n(\mathbb{C}) | \operatorname{tr} X = 0\}$.

Lie 環としての $\mathfrak{sl}_n$ の性質について次のことが成り立つ．

命題 2.2.
(1) $\mathfrak{sl}_n$ の中心は自明.
(2) $\mathfrak{sl}_n$ は半単純 Lie 環.
(3) $\mathfrak{sl}_n$ は単純.

［証明の方針］: $\mathfrak{gl}_n$ を考えるのが早い．$\mathfrak{gl}_n$ の中心はスカラー行列全体であり，$D(\mathfrak{gl}_n) = \mathfrak{sl}_n$ である．特に，$\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n) \oplus \mathfrak{sl}_n$ となる．このことから直接計算することで，$\mathfrak{gl}_n$ の非自明なイデアルはこの 2 つに限ること，および $\mathfrak{sl}_n$ の非自明なイデアルは $\mathfrak{gl}_n$ のイデアルになることがわかるので，$\mathfrak{sl}_n$ の単純性，従って半単純性が従う．

半単純性については，Killing form を利用する方法も重要である．そのためには，やはりまず $\mathfrak{gl}_n$ の Killing form が $2n \operatorname{tr}(XY) - 2\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$ であることを示し，これを直接 $\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n$ に制限することで $\mathfrak{sl}_n$ の Killing form が得られることに注意すれば，$\mathfrak{sl}_n$ の Killing form は $2n \operatorname{tr}(XY)$ となる．直接の計算で，これが非退化であることがチェックできるので，Cartan の半単純性判定条件によって，$\mathfrak{sl}_n$ が半単純であることが従う．

2.2　Cartan 部分環

$\mathfrak{sl}_n$ の部分 Lie 環を 3 つ定義しよう．

定義 2.3.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \{X = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\} \\
\mathfrak{n}_+ &= \{\text{ 対角成分がすべて 0 の上半三角行列 }\} \\
\mathfrak{n}_= &= \{\text{ 対角成分がすべて 0 の下半三角行列 }\}
\end{aligned}
$$

次の命題は明らかである．

命題 2.4.
(1) $\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_-$ は $\mathfrak{sl}_n$ の部分 Lie 環であり，特に，$\mathfrak{h}$ は可換 Lie 環，$\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_-$ はともにベキ零 Lie 環である．
(2) 直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ が成り立つ．
(3) Borel 部分環 $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$ は可解 Lie 環であり，特に $D\mathfrak{b} = \mathfrak{n}_+$ である．

2.3 ルートとルート分解

$\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とし，その元として，

$$\varepsilon_{ij} : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}; \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i - \lambda_j$$

を考える．これを $\mathfrak{sl}_n$ の**ルート**と呼び，特に，

$$R_+ = \{\varepsilon_{ij} | i < j\}$$

を**positive root** という．ルートの全体を R とかくと，

$$R = R_+ \cup (-R_+) = R_+ \cup R_-$$

となっている．
次に，$\alpha_i := \varepsilon_{i,i+1}$ と定義し，**単純ルート**(simple root：あるいは基本ルート) という．$i < j$ のとき，

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$$

とかけることに注意しておく．
$\alpha = \varepsilon_{ij}$ をルートとし，$X_\alpha := E_{ij}; (i,j)$ 行列単位 とし，$H_\alpha = E_{i,i} - E_{j,j}$ と定義する．このとき，次の命題は基本的である．

命題 2.5.
(1) $\{X_\alpha | \alpha \in R_+\}$ は $\mathfrak{n}_+$ の，$\{X_\alpha | \alpha \in R_-\}$ は $\mathfrak{n}_-$ の基底を与える．
(2) $H \in \mathfrak{h}, \alpha \in R$ に対して，$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$.
(3) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

［証明］：(1) は明らか．(2),(3) は直接行列単位の計算をせよ． ■
明らかなことだが，$n = 2$ の場合には，positive root は，$\alpha = e_{12}$ であり，同時にこれは simple root でもある．更に，

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．これは $\mathfrak{sl}_2$ の基底としてよく知られている h, e, f に他ならない．

§ 3 表現のウェイトと最高ウェイトベクトル

$\mathfrak{sl}_n$ の有限次元表現 V を考える．(V は $\mathfrak{sl}_n$-加群と言ってもよい.)

定義 3.1. $\chi \in \mathfrak{h}^*$ に対し，

$$V_\chi := \{v \in V | H \cdot v = \chi(H)v \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

と定義し，ウェイト χ のウェイト空間という．その元は同時固有値（ウェイト）χ を持つ $\mathfrak{h}$ の同時固有ベクトルである．

前の命題 2.5 を利用すると，ウェイト空間に関する基本的な性質が得られる．

命題 3.2. $\alpha \in R, v \in V_\chi$ に対し，$X_\alpha \cdot v \in V_{\chi+\alpha}$.

［証明］ 実際,

$$HX_\alpha \cdot v = [H, X_\alpha]v + X_\alpha Hv = \alpha(H)X_\alpha v + \chi(H)X_\alpha v = (\chi + \alpha)(H)X_\alpha v$$

よりわかる． ■

これを利用すると，実は，次の命題が成り立つ．

命題 3.3. $V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$.

但し，このことを証明するには，次の“ 大きな ”定理が必要である[1].

定理 3.4. ［**Weyl の完全可約性定理**］
半単純 Lie 環の有限次元表現は完全可約である．

われわれは，この定理を認めて先へ進むことにしよう．
［命題 3.3 の証明］ 相異なる固有値に対応する固有ベクトルは一次独立であることに注意すると，$W = \sum_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$ は直和となる．ここで W が $\mathfrak{sl}_n$ の作用で不変である．実際，まず，前命題より X_α で閉じている．$\mathfrak{h}$ の元の作用で閉じていることは明らかだから，$\mathfrak{sl}_n$ の作用で閉じている．

ここで V が完全可約であることに注意すれば，$V = W \oplus W'$ なる $\mathfrak{sl}_n$-不変な補空間 W' がとれる．ここで $W' \neq 0$ であるとすると，これは，可換部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ によって同時固有分解されなければならない．ここで 0 でない同時固有ベクトルを v とする.（この箇所で，基礎体が代数的閉体であることを使っている.）

v は $\mathfrak{h}$ の同時固有ベクトルであることから，V_χ のどれかに属さなければならず，これは，W と W' とに非自明な共通部分がないことに矛盾する．従って，$W' = 0$ でなければならないから，命題の主張が従う． ■

定義 3.5. $V_\chi \neq 0$ であるような χ を V のウェイトといい，$\dim V_\chi$ を χ の重複度 (multiplicity) という．

Remark 3.6. V として $\mathfrak{g}$ 自身をとり，$\mathfrak{g}$ の随伴表現を考える．このときのウェイトとは，$\mathfrak{g}$ のルートに他ならない.

命題 3.7. $v \in V$ に対して，次の 2 条件は同値.
(1) v は Borel 部分環 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ の固有ベクトル.
(2) v は $\mathfrak{h}$ の固有ベクトルで，$X_\alpha v = 0\ \forall \alpha \in R_+$.

定義 3.8. 前命題の同値な条件（一般的には (2)）をみたす $v \in V$ を**最高ウェイトベクトル**(あるいは primitive vector) という．

[1]証明は，[杉浦]，[Serre]，[東郷]，[佐武] などを参照せよ．

定義 3.9. $\mathfrak{sl}_n$-加群 $V \neq \{0\}$ には，最高ウェイトベクトル v が存在する．

［証明］：V が有限次元であることから，命題 3.3 に注意すると，ウェイトの集合は有限で，かつ空ではない．また，命題 3.2 より，X_α を作用させることで，ウェイトは α だけ変化するのだから，適当な 0 でない固有ベクトルをひとつとって，X_{α_1} で 0 になる直前まで動かし，ついで X_{α_2} で 0 になる直前まで動かすというようにすれば，あるウェイト χ であって，どんな i に対しても $\chi + \alpha_i$ がウェイトではないようなものがとれる．このとき明らかに，V_χ の元が primitive vector である． ■
［別証］：前命題から，$\mathfrak{b}$-加群として固有値を持てばよいので，V を $\mathfrak{b}$-加群と思って，Lie の定理[2]を適用すればよい． ■

§ 4 $\mathfrak{sl}_n$ の既約表現

$\mathfrak{sl}_n$ の既約表現が最高ウェイトで決まる．これが，この paper の主定理であり，それをこの節で証明する．

全体としては，次のような流れで証明する．まず primitive vector を利用して既約表現を構成する（定理 4.1）．次に，既約表現がその形のもので尽くされていることを示す（定理 4.2）．

定理 4.1. V を $\mathfrak{sl}_n$-加群とし，v を primitive vector であるとし，そのウェイトを χ とする．$V_1 := U(\mathfrak{sl}_n) \cdot v$ なる V の部分加群を考える．このとき，次が成り立つ．
(1) V_1 は既約.
(2) V_1 の元のウェイトは $\chi - \sum_{i=1}^{n-1} m_i\alpha_i \; m_i \geq 0$ の形.
(3) V_1 の元でウェイト χ の元は，v のスカラー倍の形に限る.

［証明］
$U(\mathfrak{g})$ が三角分解（を 2 つにまとめたもの）

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{b})$$

を持つことに注意する．primitive vector$v$ は，$\mathfrak{b}$ の固有ベクトルだから $U(\mathfrak{b})$ の作用ではスカラー倍しか変わらないことから，

$$V_1 := U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-)\mathfrak{g}$$

となる．ここで PBW-thorem から，$U(\mathfrak{n}_-)$ は $X_{-\alpha}$ $(\alpha \in R_+)$ の単項式の全体 M で生成されているので，V_1 は Mv で生成される．このとき，命題 3.2 より，Mv のウェイトは，

$$\chi - \sum_{\alpha \in R_+} q_\alpha \alpha \quad (q_\alpha \geq 0)$$

と書かれる．これにより (2) が成立する．

(3) は，上式が χ に一致するのは，q_α がすべて 0 となるときであり，それは，$M = 1$ のときに他ならないことに注意すれば従う．

(1) を示す．V_1 が 2 つの $\mathfrak{sl}_n$-加群 W, W' の直和に分解したとすると，この分解に対応して $v = w + w'$ と分解するが，$(V_1)_\chi = (W)_\chi \oplus (W')_\chi$ であることから，w, w' はともにウェイトが χ である．(3) のこと

[2] V を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の可解部分環 $\mathfrak{g}$ に対して，同時固有ベクトルが存在することを保証している定理．例えば，[杉浦]，[Serre]，[東郷]，[佐武] などを参照せよ．

から，これは v のスカラー倍に限が，ともに 0 でないとすれば，W, W' に非自明な共通部分ができてしまうので，どちらか一方は 0 である．それが w' であるとすると，$v = w$．一方 V_1 は $v = w$ で生成されるから $V = W, W' = 0$．■

定理 4.2. (1) V を既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群とする．V の primitive vector はスカラー倍を除いて一意的に定まり，対応するウェイトを**最高ウェイト**(highest weight) という．
(2) 同じ最高ウェイトを持つ既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群は同型である．

［証明］ 命題3.9から，V には少なくとも一つ最高ウェイトベクトル v が存在する．そのウェイトを χ とする．このとき，さらにべつの v' がウェイト χ' の最高ウェイトベクトルだと仮定する．いま V が既約であることから，v は V を生成する（定理4.1）．このとき，V のウェイトは，$\chi - \sum_i m_i\alpha_i$ $(m_i \geq 0)$ の形でかけるのだから，

$$\chi - \chi' = \sum_{i=1}^{n-1} m_i\alpha_i \quad (m_i \geq 0\ \forall i)$$

である．v' についても同様の議論ができるから，

$$\chi' - \chi = \sum_{i=1}^{n-1} m_i'\alpha_i \quad (m_i' \geq 0\ \forall i)$$

が成り立つ．このことは，$m_i = 0 = m_i'$ を示しており，$\chi = \chi'$ が従う．定理4.1より v' は v のスカラー倍でなければならない．よって (1) が成立．
(2) を示す．V_1, V_2 を 2 つの既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群とし，ウェイト χ の最高ウェイトベクトル v_1, v_2 を持つとする．このとき，$v = (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ はウェイト χ の最高ウェイトベクトルであり，定理4.1から，v で生成される V の部分加群 W は既約．このとき自然な射影 $p_i : W \to V_i; p_i(v) = v_i$ を考える．W, V_i がともに既約であることに注意すれば，これは同型．よって，$V_1 \cong W \cong V_2$ となる．■

§ 5　最高ウェイトの決定

定理 5.1. $\chi \in \mathfrak{h}^*$ が $H = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対し，

$$\chi(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n$$

をみたすとする．このとき，次は同値．
(1) χ を最高ウェイトとする既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群が存在．
(2) $u_i - u_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i < j)$.

[証明]
(1)⇒(2) を示す．
$\alpha = \varepsilon_{ij}$ $(i < j)$ なる positive root を考える．このとき，$H_\alpha = E_{ij}$ であるから，$\chi(H_\alpha) = u_i - u_j$．従って，(2) を示すには，任意の psitive rootα に対して，$\chi(H_\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を示せばよい．

補題 5.2. v をウェイト χ の primitive vector とする．さらに

$$v_m^\alpha := (X_{-\alpha})^m v/m!$$

と定義する．ここで α は positive root，$m \geq 0$ である．このとき，次の計算が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad X_{-\alpha}v_m^{\alpha} = (m+1)v_{m+1}^{\alpha},\\
&(2) \qquad Hv_m^{\alpha} = (\chi - m\alpha)(H)v_{m+1}^{\alpha},\ \forall H \in \mathfrak{h}\\
&(3) \qquad X_{\alpha}v_m^{\alpha} = (\chi(H_{\alpha}) - m + 1)v_{m-1}^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

実際，(1) は明らか．(2) は命題 3.2 から v_m^{α} のウェイトが $\chi - m\alpha$ であることにより従う．(3) は m に関する帰納法．$m = 0$ のとき $v_{-1}^{\alpha} = 0$ とおいておくと，v が最高ウェイトベクトルであることから，$X_{\alpha}v = 0$ だから成立．次に，$m \geq 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
mX_{\alpha}v_m^{\alpha} &= X_{\alpha}x_{-\alpha}v_{m-1}^{\alpha}\\
&= [X_{\alpha}, X_{-\alpha}]v_{m-1}^{\alpha} + X_{-\alpha}X_{\alpha}v_{m-1}^{\alpha}\\
&= [(\chi - (m-1)\alpha)(H)_{\alpha}]v_{m-1}^{\alpha} + [X_{-\alpha}(\chi(H_{\alpha}) - m + 2)]v_{m-2}^{\alpha}\\
&= [\chi(H_{\alpha}) - (m-1)\alpha(H_{\alpha}) + (m-1)\chi(H_{\alpha}) - (m-1)(m-2)]v_{m-1}^{\alpha}\\
&= m(\chi(H_{\alpha}) - m + 1)v_{m-1}^{\alpha}
\end{aligned}
$$

となって両辺を m でわって主張が成り立つ．　□

系 5.3.　ある $m \geq 0$ が存在して，$v_m^{\alpha} \neq 0$ かつ $v_{m+1}^{\alpha} = 0$ が成り立つ．またこのとき $\chi(H_{\alpha}) = m$ である．

実際，v_m^{α} のウェイトは $\chi - m\alpha$ であり，今考えているのが有限次元表現であることから m が十分大きいとき $v_m^{\alpha} = 0$ となるから，主張のような m が存在する．しかも前補題の (3) から，

$$0 = X_{\alpha}v_{m+1}^{\alpha} = (\chi(H_{\alpha}) - m)v_m^{\alpha}$$

であるが，右辺の $v_m^{\alpha} \neq 0$ であることから $(\chi(H_{\alpha}) - m) = 0$．すなわち $\chi(H_{\alpha}) = m$ が従う．　□

これによって，任意の positive rootα に対して $\chi(H_{\alpha}) = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が示されたので，(1)⇒(2) が示された．

(2)⇒(1) を示す.

$$\pi_i(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i\ (1 \leq i \leq n-1)$$

と定義する．このとき，(2) の条件は,

$$\chi = \sum_{i=1}^{n-1} m_i\pi_i \quad (m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と同値.

補題 5.4.

(1)　χ, χ' を既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群の最高ウェイトとする．このとき，$\chi + \chi'$ は $V \otimes V'$ のある既約部分加群の最高ウェイトとなる．

(2)　最高ウェイトの集合は加法に関して閉じている．

実際，v, v' を対応する最高ウェイトベクトルとすると，$v \otimes v' \in V \otimes V'$ は，

$$h(v \otimes v') = h(v) \otimes v' + v \otimes h(v') = (\chi + \chi')(h)(v \otimes v')$$

となるから，$v \otimes v'$ のウェイトは $\chi + \chi'$．しかもすべての X_α $(\alpha \in R_+)$ に対して，上と同様の計算によって消えることがわかるから，これは primitive vector．従って，$v \otimes v'$ で生成される部分加群は既約であり，これが求めるもの．

(2) は聊か言葉づかいが良くないが，χ, χ' を最高ウェイトとするような既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群があれば，$\chi + \chi'$ を最高ウェイトとする既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群が存在するという意味で，(1) から明らか． □

上の補題から，π_i を最高ウェイトとするような既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群があれば，χ を最高ウェイトとする既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群が存在することが言えて (1) が従う．

そこで，π_i を最高ウェイトとするような既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群を実際に構成する．

補題 5.5. $V = \mathbb{K}^n$ とし，$\mathfrak{sl}_n$ を自然に左からの掛け算で作用させる．V の標準基底を e_i としておく．このとき，V の k 個の外積 $V_i = V \wedge \cdots \wedge V = \wedge^i V$ には，

$$X(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \sum_{j=1}^{k} v_1 \wedge \cdots \wedge (Xv_i) \wedge \cdots \wedge v_k$$

によって，$\mathfrak{sl}_n$ が自然に作用する．このとき，V_i は，最高ウェイト π_i の既約 $\mathfrak{sl}_n$-加群である．

実際，まず，positive root$\alpha \in R_+$ に対して，X_α を $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ に作用させることを考える．$\alpha = \varepsilon i, j$ $(i < j)$ とすると，$X_\alpha = E_{ij}$ は，e_j にのみ非自明に作用して，$X_\alpha e_j = e_i$ となることと $i < j$ に注意すれば，すべての X_α に対して，$e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ が消えることがわかる．従って，$e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ は primitive vector．そのウェイトは，$H = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$h \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$$

であることから，π_k に他ならない．一方，$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ に $X_{-\alpha}$ を作用させ続けることを考える．このときは，$X_{-\alpha} = E_{ji}$ であるから，e_i にのみ非自明に作用し，e_j を与える．従って，もし e_j の項がなければ，消えることはない．このことを利用すると，$e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ に $X_{-\alpha}$ を作用させることで，V_k の基底 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} | i_1 < \cdots < i_k\}$ がすべて得られる．以上により補題の主張が示された． □

既に述べたように，これによって (2)⇒(1) の証明が完成した． ■

Remark 5.6. 上記の証明を，内積の言葉を用いて，通常の Lie 環の教科書に書かれている言葉になおしておく．

まず,（本来は Killing form を使うのだが）$\mathfrak{h}$ には，自然に内積

$$< \mathrm{diag}(\lambda_i), \mathrm{diag}(\lambda'_i) > := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda'_i$$

が導入できる．この内積を用いて，$\mathfrak{h}^*$ にも内積を導入できる．すなわち，$\chi \in \mathfrak{h}^*$ に対し，

$$< \alpha_i, \alpha_j > := < H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} >, \quad < \chi, \alpha_i > := \chi(\alpha_i)$$

と定義する．このとき，$\mathfrak{h}^*$ の内積 $< \, , \, >$ に関する $\{\alpha_i | 1 \leq i \leq n-1\}$ の双対基底を $\{\Lambda_i | 1 \leq i \leq n-1\}$ と書いて，基本ウェイトという．

一方，$<\chi, \alpha_i> \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をみたす $\chi \in \eqsim^*$ を支配的ウェイトと呼ぶ．前定理で示したことの半分は，χ を最高ウェイトとする既約表現があれば，χ は支配的であるということだった（(1)⇒(2)）．

一方，$\chi \in \mathfrak{h}^*$ は，

$$\chi = \sum_{i=1}^{m-1} \Lambda_i$$

と展開できるが，$\{\alpha_i\}, \{\Lambda_i\}$ が双対基底であることに注意すると，χ が支配的であることと $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であることは同値である．

ところで，Λ_i とは何か．そのために，$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に Λ_i を作用させることを考える．そのためには，$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を H_{α_i} で展開すればよいが，それは

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_j) H_{\alpha_j}$$

に他ならないから，

$$\Lambda_i(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$$

となり，$\Lambda_i = \pi_i$ に他ならない．従って，前定理の後半（(1)⇒(2)）で示したことは，χ が支配的ウェイトであれば，χ を最高ウェイトとする既約表現が存在することであった．

すなわち，$\mathfrak{sl}_n$ の既約表現は支配的ウェイトと一対一に対応している．支配的ウェイトは，基本ウェイトの $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-一次結合と一対一に対応していることになる．

Remark 5.7. このPaperの議論の中で，定理5.1の前半までは，一般の半単純Lie環に関して全く同様に進めることができるが，定理5.1の後半はそう上手くはいかない．一般論のいわば一番の難所の部分が実はこの部分に他ならず，Verma加群と呼ばれる概念を導入する必要がある．すなわち，一般には，primitive vectorに $U(\mathfrak{n}_-)$ の元を作用させ続けていくと，有限次元にはならない．このようにしてできた $\mathfrak{g}$-加群を最高ウェイト χ のVerma加群といい $V(\chi)$ などとかく．実は，この中には，極大部分加群が存在し，これで $V(\chi)$ をわると，有限次元既約表現となることが証明できる．(既約性は自明．有限次元性が難しい．）このようにして一般にも同様の結果

$$\{\text{半単純 Lie 環の有限次元既約表現}\} \Leftrightarrow \{\mathfrak{h}^* \text{の支配的ウェイト}\}$$

なる一対一対応が証明できる．

Remark 5.8. 上記の結果から，次のことがわかる．これが，このPaperの主定理に他ならない．

$\mathfrak{sl}_n$ の有限次元既約表現の分類

$\mathfrak{sl}_n$ の既約表現は，最高ウェイトによって完全に分類され，しかもとりうる最高ウェイトは，$(m_1, \cdots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ と一対一に対応している．

しかし，われわれはここで満足するわけには行かない．そのために，もう一度表現論の3つの指導原理を思い出そう．

指導原理 5.9. 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が与えられたとき，その既約表現を決定せよ．

指導原理 5.10. 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現が与えられたとき，その既約表現への直和分解を与える方法を与えよ．

指導原理 5.11. 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の与えられた表現から新たな表現 (例えば，テンソル積表現，反傾表現) を構成するとき，それがどのような既約表現の直和に分解するかを決定する方法を与えよ．

われわれは $\mathfrak{sl}_n$ の表現論を見てきたわけだが，完成したのは，あくまでも指導原理 5.9 および指導原理 5.10 の一部に過ぎない．われわれは確かに，$\mathfrak{sl}_n$ の既約表現の分類を完成した．それは最高ウェイト，更に言えば，非負整数の $n-1$ 個の組で完全に分類されたのだった．しかし，それを与えたとき，既約表現の次元はどう計算するのだろうか．また，各ウェイトの重複度はどうだろう．こうしたことにわれわれはまだ答えていない．

§ 参考文献

[杉浦] 『リー群論』（杉浦光夫：共立出版）

[Serre] 『Lie Algebras and Lie Groups』（J.P.Serre：Lecture Note in Mathematics:Springer Verlag）

[東郷] 『リー代数』（東郷重明：槇書店）

[佐武] 『リー環の話 [新版]』（佐武一郎：日本評論社）