

所得格差と消費格差の比較

2013年度統計関連学会連合大会



生活水準と所得・消費の水準

全米科学アカデミーの貧困計測に関する報告書 (Citro and Michael [1995])

「所得に基づく貧困の定義は、自分自身が有するリソースによって、貧困レベルより高い生活水準を達成する家族の能力を問題とする場合により適切であり、...

これに対し、消費支出に基づく貧困の定義は、どのようにして達成するかに係らず、実際の生活水準を問題とする場合により適切である。

実際には、高品質なデータの利用可能性が、しばしば、どの定義を用いるかの主要な決定因となっている。」

EUでは、所得を用いて(相対)貧困率を定義しているが、
“At-risk-of-poverty rate”と呼んでいる

Fisher, Johnson and Smeeding [2012]は、上記の見解に同意し、米国の生活水準の格差をConsumer Expenditure Surveyの所得・消費データを用いて計測し比較

消費支出の格差を計測する意義と問題点



(特に高齢化の進行, 老齢年金の支給開始年齢の引上げが行われている状況において)生活水準を所得よりも的確に表している可能性



購入頻度が少ない品目への支出や季節性を考慮すると, 各世帯の1年以上の期間の消費支出の水準を用いるべきであろうが, 長期間の支出を調査することは容易でない

9～11月の3か月間の支出データ(単身世帯は10～11月の2か月間)であるが, 全国消費実態調査を用いて消費支出のジニ係数を算出した大竹[2003]などの研究がある。

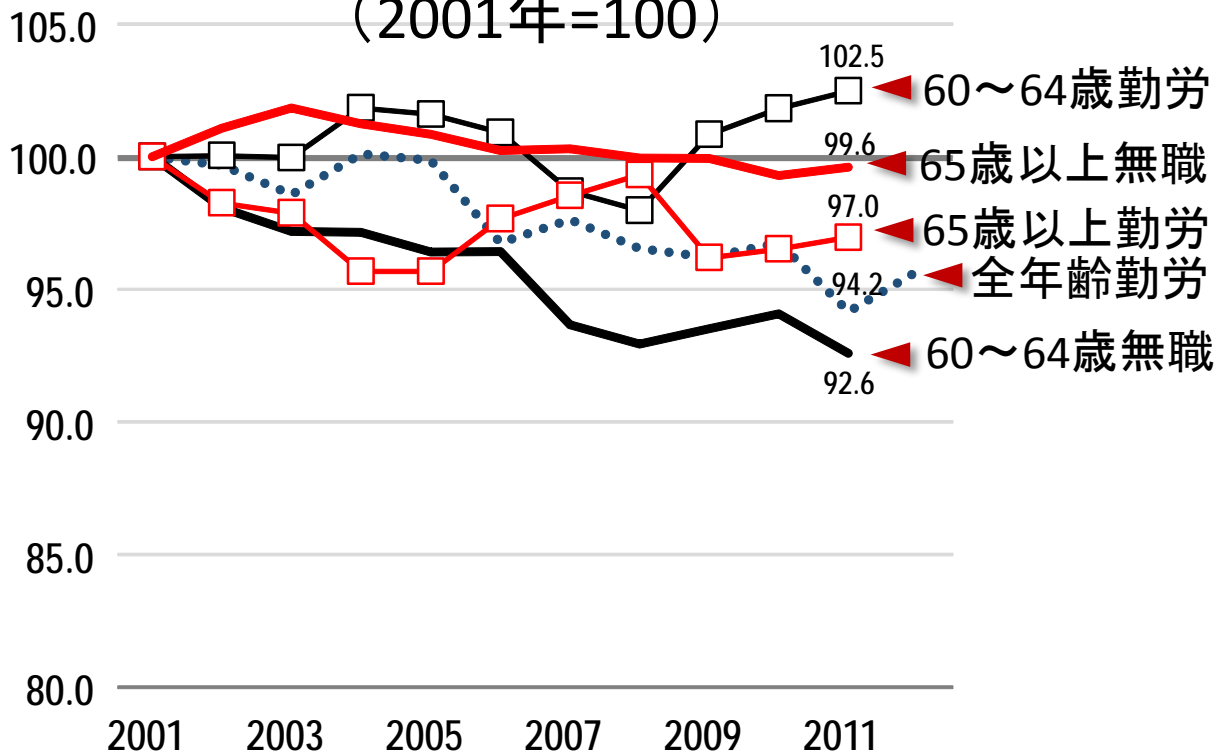
ただし, 1999年以前の結果を用いたものが殆ど, 松尾[2012]の研究では2004, 2009年結果を用いているが, 所得のジニ係数の算出等が適切に行われていないとみられ, 所得と消費の格差の推移の違いが認識されていない。

世帯主が高齢者の世帯の家計収支の推移

老齢年金(定額部分)の支給開始年齢の引上げにより, 60~64歳無職世帯の所得が大幅減少, それに比べると消費支出の減少幅は小さい

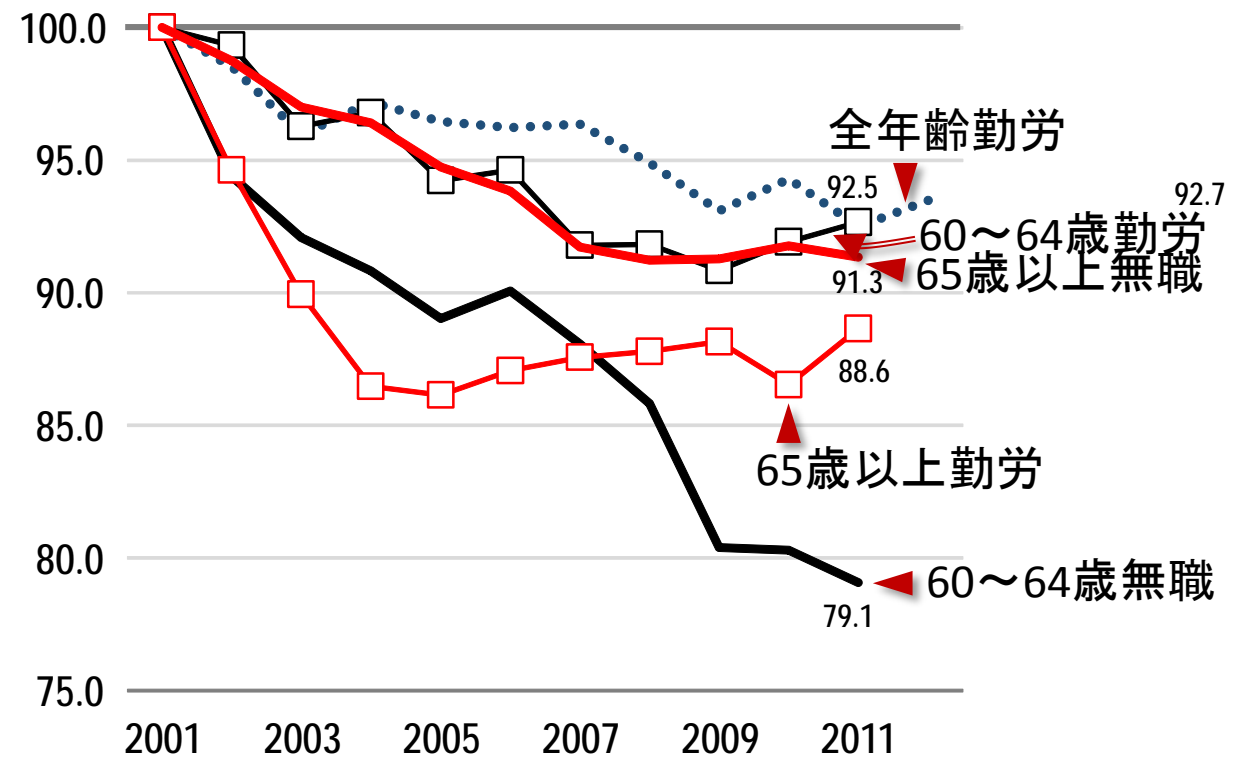
世帯当たり消費支出の推移

(2001年=100)



世帯当たり可処分所得の推移

(2001年=100)

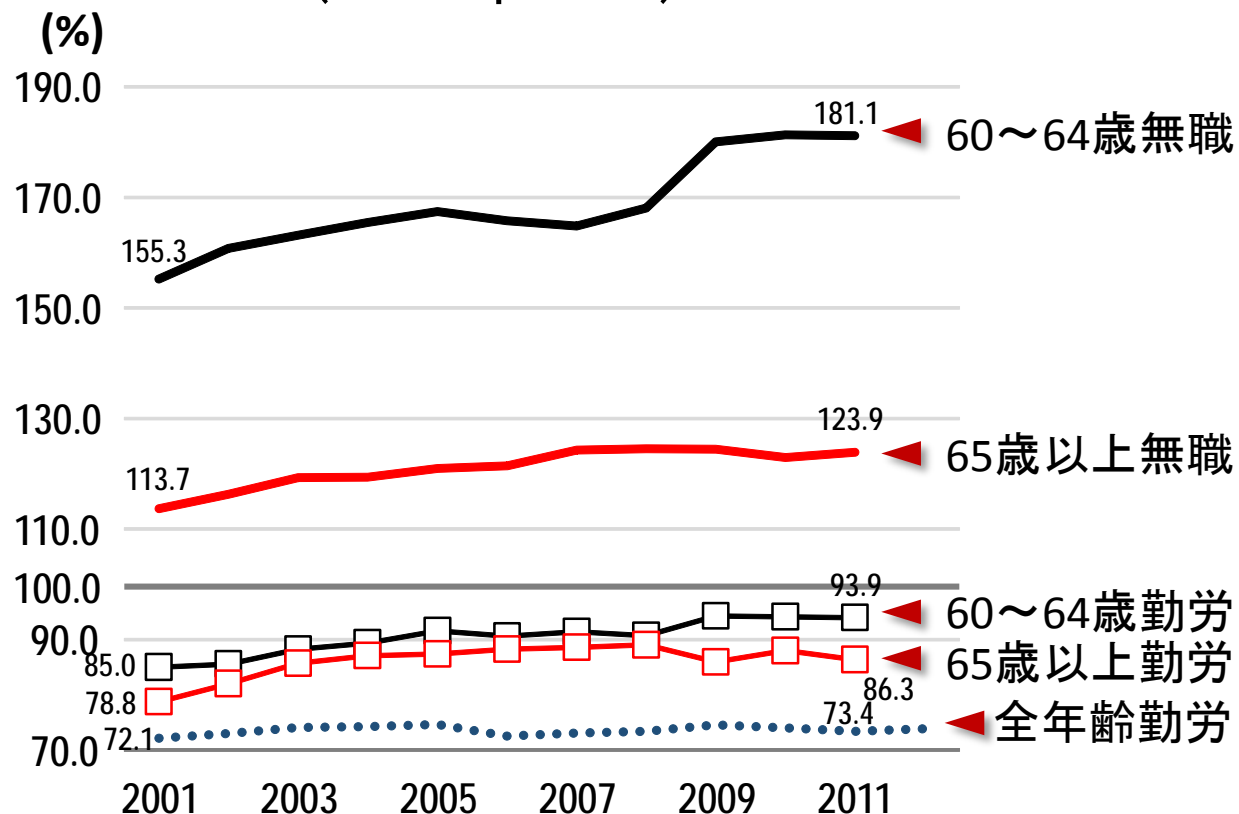


家計調査, 2人以上の世帯

60~64歳の世帯, 65歳以上の世帯は3か年移動平均

持家の帰属家賃を除く総合CPIで実質化

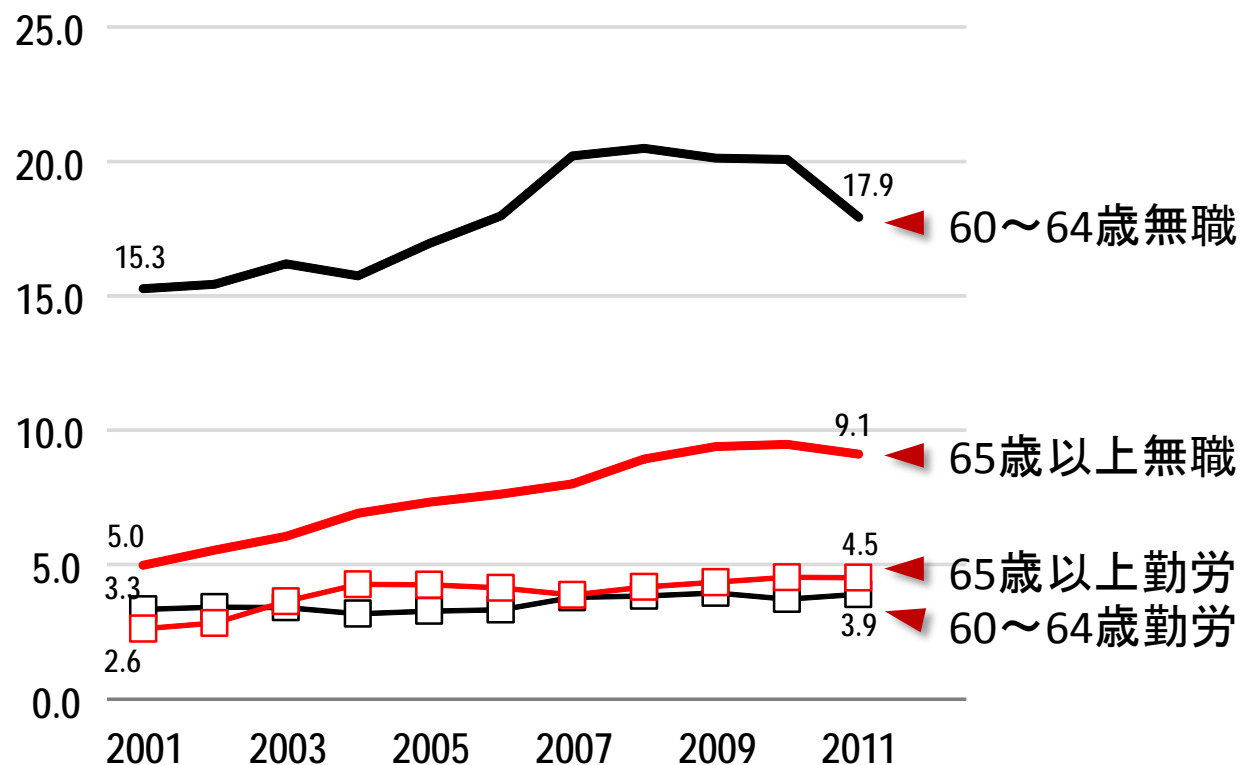
平均消費性向の推移 (2001年=100)



家計調査, 2人以上の世帯

60~64歳の世帯, 65歳以上の世帯は3か年移動平均

個人・企業年金取金／可処分所得の推移 (2001年=100)

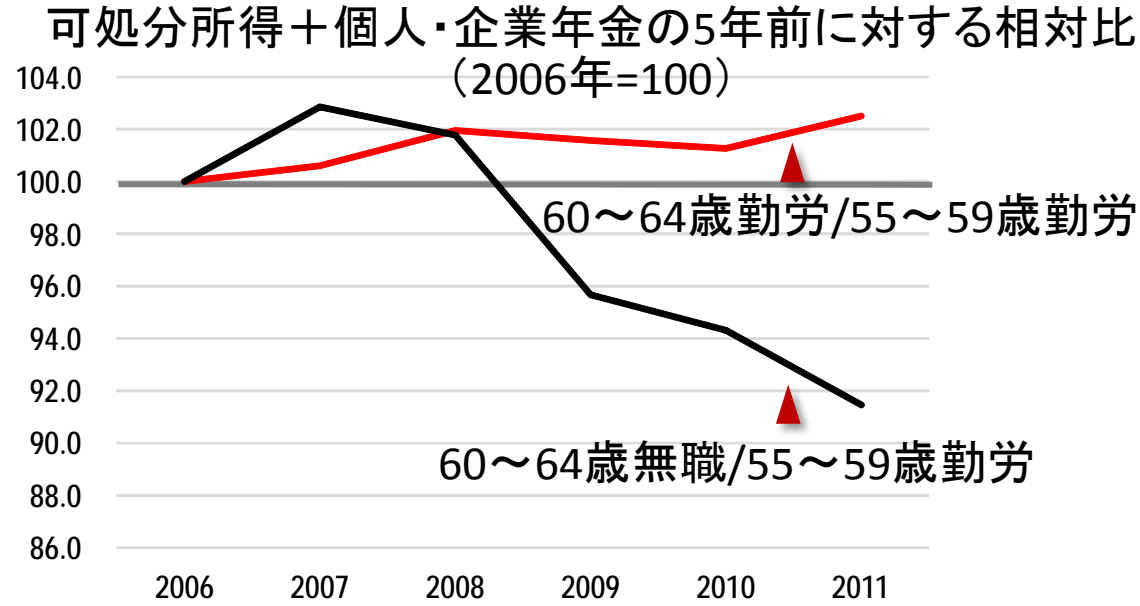
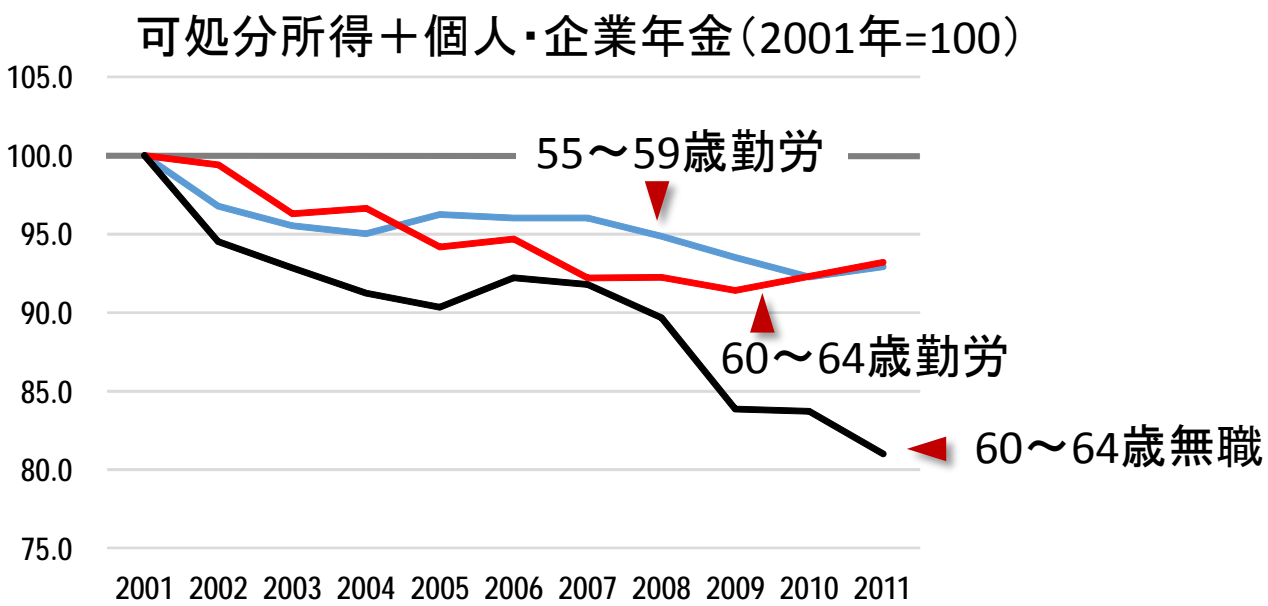
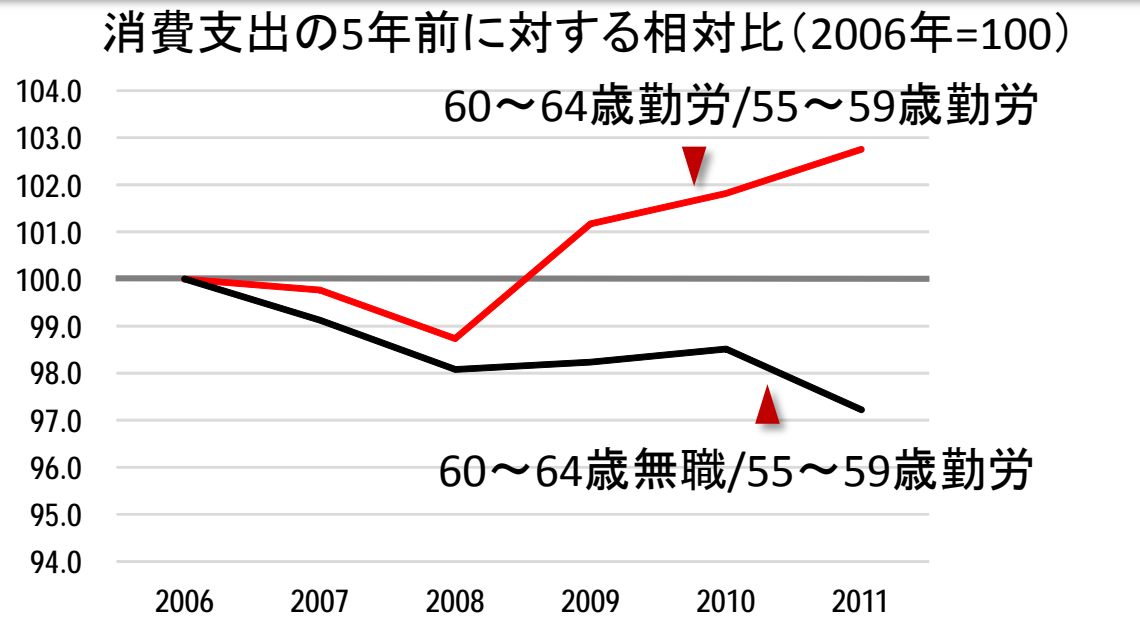
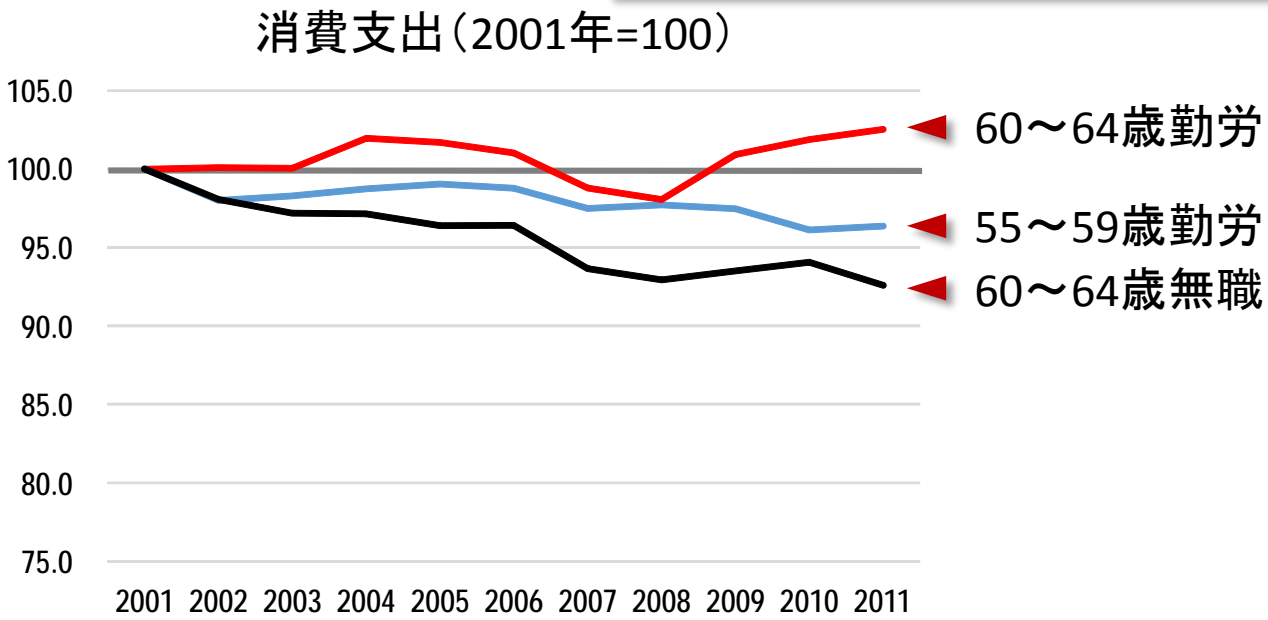


個人・企業年金は, 預貯金引出になるため,
所得には含まれない

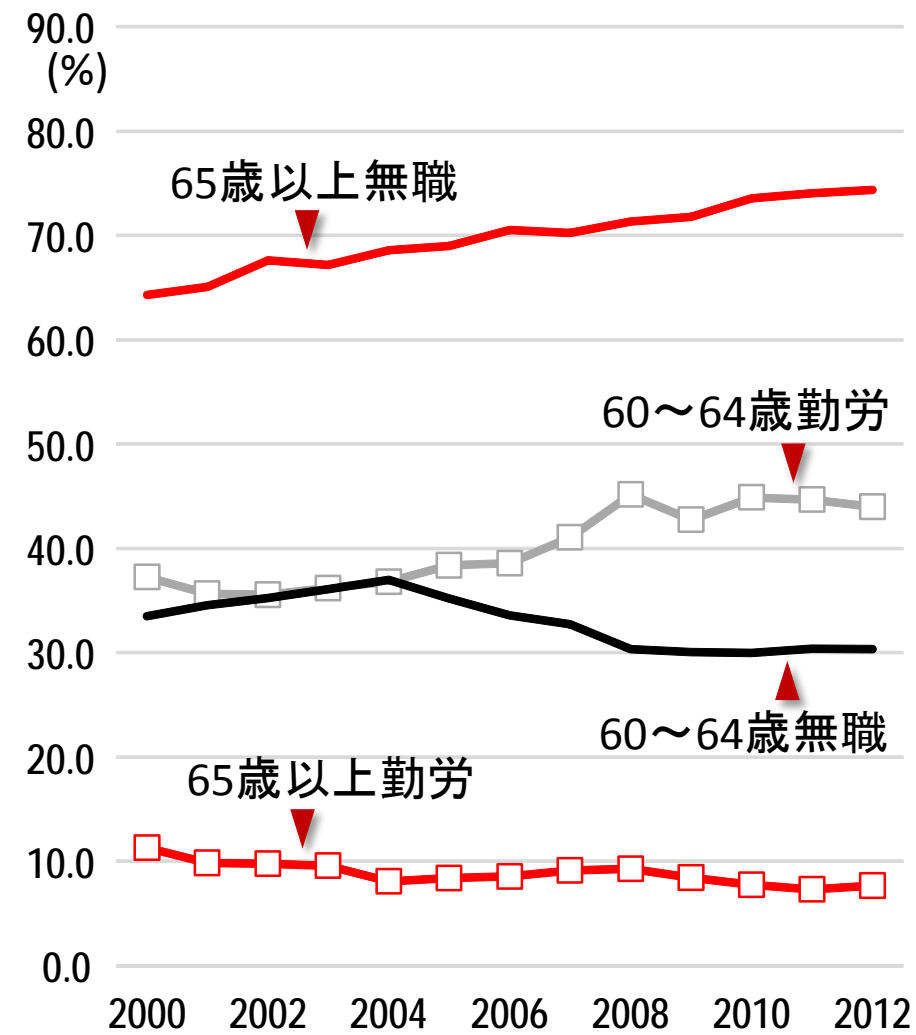
個人・企業年金の普及は, 高齢世帯の消費性向の上昇の一つの要因に成り得る

退職消費パズル？

少なくとも、公的年金の支給開始年齢の引上げ後は、退職前に比べて消費支出を減らしているように見える(厳密には、世帯人員等をコントロールする必要があるが)

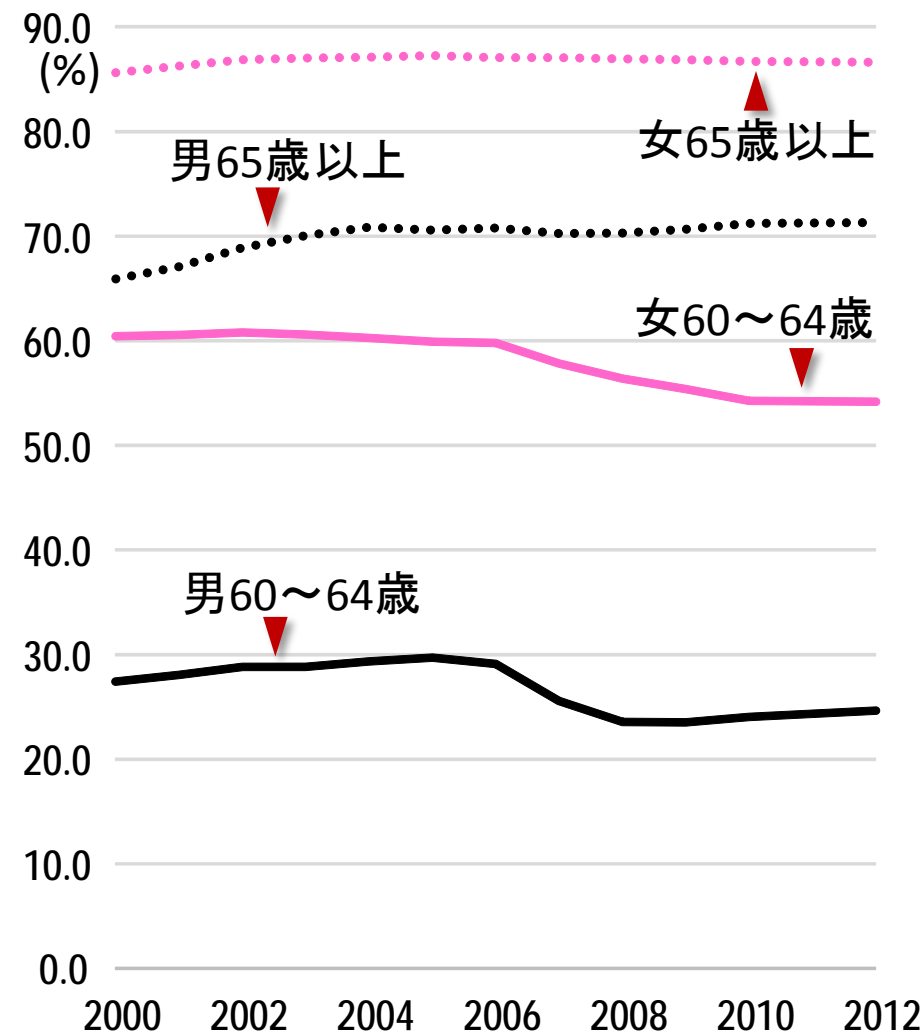


無職世帯・勤労者世帯の割合の推移



家計調査, 2人以上の世帯
世帯主の年齢が当該階級に属する世帯に占める割合

非労働力率(=100-労働力率)の推移




労働力調査
当該年齢階級の人口に占める割合

消費支出の世帯分布のジニ係数の推定方法等

使用データ：全国消費実態調査世帯分布編の消費支出金額階級別世帯分布表

 統計分布モデルを最尤法で当てはめ

2009年調査では世帯分布編第4表及び第12表

 センサス局の「パレートー線形手順」を応用したNielsen and Alderson [1997]と同様の方法

- ① 中位数を含む区分及びそれより小さい金額の区分については、当該区分の下限と上限の中間値を当該区分の平均金額とみなす
- ② それらより大きい金額の区分(最高額の区分を除く)については、累積分布が当該区分の下限と上限の経験累積分布と一致するパレート分布を当てはめて当該区分の平均金額を推定
- ③ 最高額の区分については、一つ下の区分に当てはめたパレート分布を用いて当該区分の平均金額を推定
- ④ 各区分の平均金額の推定値から、全体の平均金額を算出し、区分の境界値(下限・上限)に対応するローレンツ曲線の値(ローレンツ座標)をもとめる
- ⑤ ローレンツ座標を直線で結んだ線形補間により得られる推定ローレンツ曲線からジニ係数を算出

 実測値が得られる四分位分散係数も併用

$$\text{四分位分散係数} = \frac{\text{第3四分位点(75\%点)} - \text{第1四分位点(25\%点)}}{2 \times \text{第2四分位点(中位数, 50\%点)}}$$

使用した統計分布モデル

第2種一般化ベータ分布(GB2, McDonald [1984])

$$F_{\text{GB2}}(x|a, b, p, q) = I_z(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^z \theta^{p-1} (1 - \theta)^{q-1} d\theta \quad z = \frac{(x/b)^a}{1 + (x/b)^a}$$

$$f_{\text{GB2}}(x|a, b, p, q) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{pq} B(p, q) [1 + (x/b)^a]^{p+q}}$$

$$(a, b, p, q > 0)$$

$p = 1$ の場合がSingh-Maddala分布(SM), $q = 1$ の場合がDagum分布(Da)

第2種拡張 κ -一般化分布(E κ G2)

$$F_{\text{E}\kappa\text{G2}}(x|a, b, p, q) = I_z(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^z \theta^{p-1} (1 - \theta)^{q-1} d\theta \quad z = \left(\frac{x}{b}\right)^a \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{b}\right)^{2a}} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^a \right]$$

$$f_{\text{E}\kappa\text{G2}}(x|a, b, p, q) = \frac{a}{bB(p, q)} \frac{z^{p-\frac{1}{a}} (1 - z)^{q+\frac{1}{2a}}}{1 - \frac{1}{2}z}$$

$$x = b \left(\frac{z}{\sqrt{1 - z}} \right)^{1/a}$$

$$(a, b, p, q > 0)$$

E κ G2のパラメータが $a = \alpha$, $b = \beta \cdot (2\kappa)^{-1/\alpha}$, $p = 1$, $q = 1/2\kappa$ の場合 κ G分布に一致

κ -一般化分布(κ G, Clementi *et al.* [2007])

$$F_{\kappa G}(x|\alpha, \beta, \kappa) = 1 - \exp_{\kappa} \left[- \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right] = 1 - \left[\sqrt{1 + \kappa^2 \left(\frac{x}{\beta} \right)^{2\alpha}} - \kappa \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{1/\kappa} = \pi \quad (\alpha, \beta, \kappa > 0)$$

$$x_{\kappa G}(\pi|\alpha, \beta, \kappa) = \beta [-\ln_{\kappa}(1 - \pi)]^{\frac{1}{\alpha}} = \beta \left[-\frac{(1 - \pi)^{\kappa} - (1 - \pi)^{-\kappa}}{2\kappa} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad \leftarrow \text{累積分布関数の逆関数}$$

$$f_{\kappa G}(x|\alpha, \beta, \kappa) = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \exp_{\kappa}[-(x/\beta)^{\alpha}]}{\beta^{\alpha} \sqrt{1 + \kappa^2 (x/\beta)^{2\alpha}}} \quad \text{ここで, } \ln_{\kappa} x := \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa} \quad \leftarrow \text{Kaniadakisのdeformed対数}$$

第1種拡張 κ -一般化分布($E\kappa G1$)

分布関数は陽に表現できない

$$(a, b, q > 0, r \leq 1/2q)$$

$$x_{E\kappa G1}(\pi|a, b, q, r) = b [-\ln_{\{1/2q, r\}}(1 - \pi)]^{\frac{1}{a}} = b \left[-(1 - \pi)^r \frac{(1 - \pi)^{1/2q} - (1 - \pi)^{-1/2q}}{1/q} \right]^{\frac{1}{a}}$$

$$\text{ここで, } \ln_{\{\kappa, r\}} x := x^r \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa} \quad \leftarrow \text{Kaniadakis et al. [2004]の2パラメータdeformed対数}$$

$E\kappa G1$ のパラメータが $r = -1/2q$ の場合SM分布に一致

$r = 0, a = \alpha, b = \beta, q = 1/2\kappa$ の場合 κ G分布に一致

統計分布モデルのローレンツ曲線

統計分布モデル	ローレンツ曲線
GB2	$L_{\text{GB2}}(\pi a, b, p, q) = I_z\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right), \pi = I_z(p, q)$
EκG2	$L_{\text{EκG2}}(\pi a, b, p, q) = I_z\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{2a}\right), \pi = I_z(p, q)$
κG	$L_{\text{κG}}(\pi \alpha, \beta, \kappa) = I_z\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{2\alpha}\right), z = 1 - (1 - \pi)^{2\kappa} \text{ or } \pi = I_z(1, 1/2\kappa)$
EκG1	$L_{\text{EκG1}}(\pi a, b, q, r) = I_z\left(1 + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{2a} + \frac{qr}{a}\right), z = 1 - (1 - \pi)^{1/q} \text{ or } \pi = I_z(1, q)$

ローレンツ曲線が以下のような統計分布モデルも考えられるが、特に適合が良いとはいえない

$$L_{\text{IEκG2}}(\pi|a, b, p, q) = I_z\left(p + \frac{1}{2a}, q - \frac{1}{a}\right) \\ \pi = I_z(p, q)$$

$$L_{\text{IEκG1}}(\pi|a, b, p, r) = I_z\left(p + \frac{1}{2a} - \frac{pr}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right) \\ z = \pi^{1/p}$$

統計分布モデルの密度分布の裾

$$f_{\text{GB2}}(x) \sim c_1 x^{-aq-1} \quad (x \rightarrow \infty), \quad f_{\text{GB2}}(x) \sim c_2 x^{ap-1} \quad (x \rightarrow 0)$$

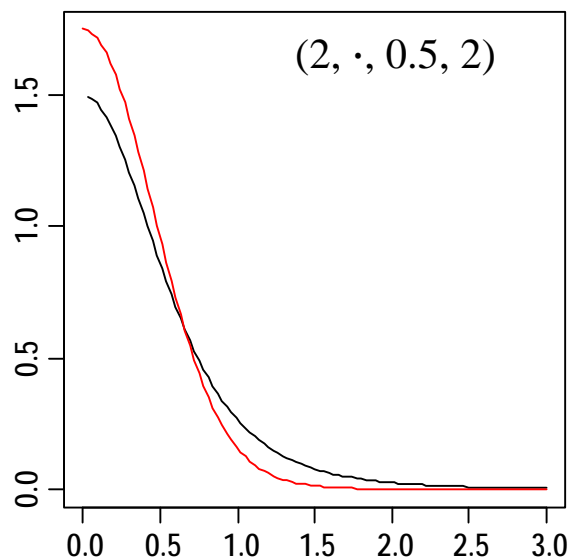
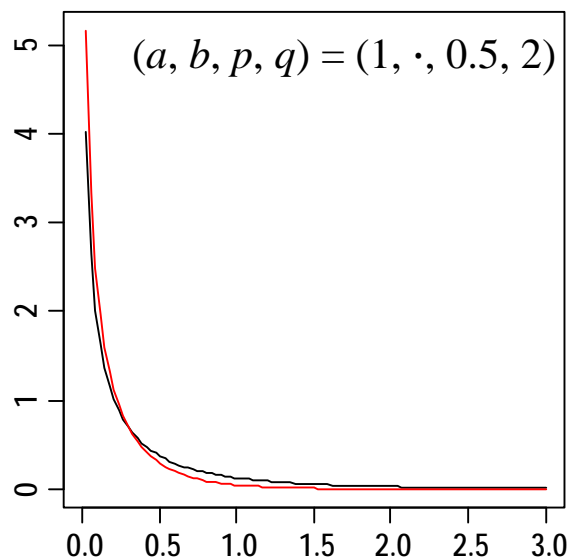
$$f_{\text{EkG2}}(x) \sim c_3 x^{-2aq-1} \quad (x \rightarrow \infty), \quad f_{\text{EkG2}}(x) \sim c_4 x^{ap-1} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$f_{\text{kG}}(x) \sim c_5 x^{-\alpha/\kappa-1} \quad (x \rightarrow \infty), \quad f_{\text{kG}}(x) \sim c_6 x^{\alpha-1} \quad (x \rightarrow 0)$$

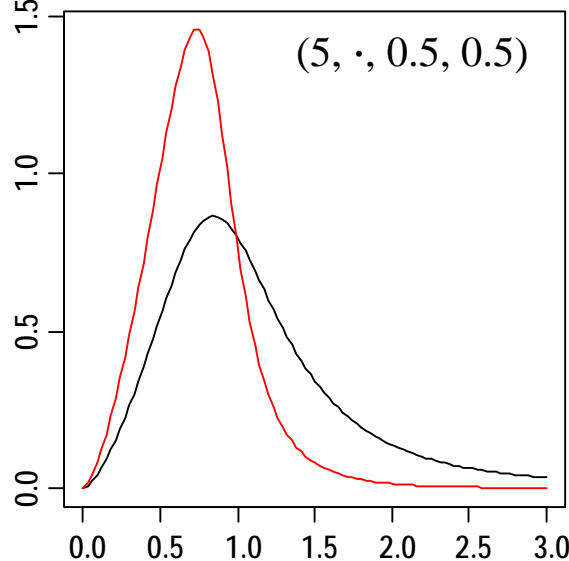
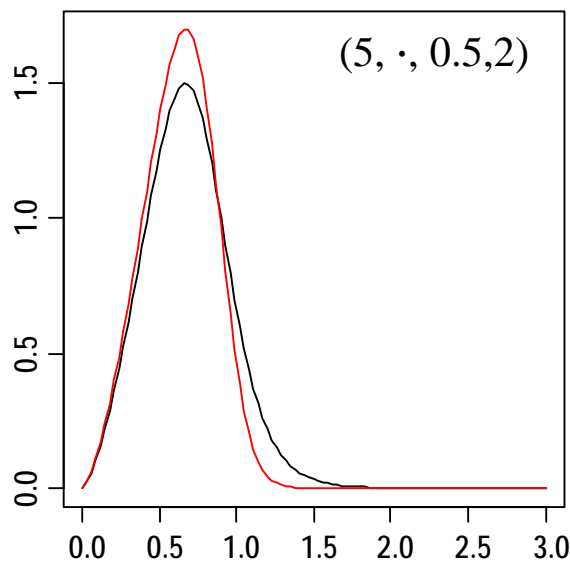
$$f_{\text{EkG1}}(x) \sim c_7 x^{-a/(1/2q-r)-1} \quad (x \rightarrow \infty), \quad f_{\text{EkG1}}(x) \sim c_8 x^{a-1} \quad (x \rightarrow 0)$$

修正

GB2とEkG2の分布密度



— GB2
— EkG2



注. スケール・パラメータ b 以外はパラメータ値が同一
GB2のスケール・パラメータ $b = 1$
EkG2のスケール・パラメータ b は, 平均値がGB2と
一致するように設定



ジニ係数やモーメントの算式, 他の統計分布モデルについて

第2種一般化ベータ分布(GB2)

McDonald [1984]参照

第1種及び第2種拡張 κ -一般化分布($E_{\kappa}G1$)

Okamoto (*to appear*)参照

κ -一般化分布(κG)

Clementi *et al.* [2009]参照

二重パレート対数正規分布(dPLN, Reed [2003])

モーメントの算式

Reed and Wu [2008]参照

ジニ係数, ローレンツ曲線の算式

Okamoto [2012, 2013]参照

統計分布モデルの消費支出金額階級分布 (2人以上の世帯)への適合度(対数尤度)

	1984	1989	1994	1999	2004	2009
SM	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Da	1.6	0.0	1.8	8.7	3.7	0.6
GG	-172.6	-145.1	-90.4	-105.8	-175.2	-235.7
κ G	-20.7	-34.0	-56.2	-102.5	-76.7	-65.5
GB2	3.0	0.1	2.1	13.2	3.7	1.1
dPLN	1.5	-2.6	1.0	12.6	1.8	1.8
E κ G1	2.9	0.8	2.0	10.3	1.9	0.1
E κ G2	2.5	3.2	1.5	13.8	6.0	5.1

消費支出の分布に関してはE κ G2の尤度が高い

対数尤度についてはSM分布との差を表章
GG: 一般化ガンマ分布

以下同様

統計分布モデルの年収階級分布(2人以上の世帯) への適合度(対数尤度, ローレンツ曲線のRSSE)

		1984	1989	1994	1999	2004	2009
対数尤度	SM	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	Da	4.4	-33.9	-59.3	-110.8	-66.1	-63.9
	GG	-219.0	-145.0	-88.0	46.5	14.1	23.7
	κG	-30.7	-108.8	-122.9	-185.0	-207.0	-208.5
	GB2	5.1	7.7	19.6	77.9	71.2	73.8
	dPLN	11.1	14.8	20.9	87.4	82.7	83.3
	EκG1	0.8	10.8	14.5	38.6	46.2	48.1
	EκG2	-7.4	0.5	18.2	74.8	67.1	70.5
L-RSSE	SM	0.0054	0.0166	0.0125	0.0099	0.0100	0.0071
	Da	0.0061	0.0059	0.0066	0.0154	0.0149	0.0224
	GG	0.0429	0.0399	0.0284	0.0224	0.0282	0.0229
	κG	0.0221	0.0068	0.0074	0.0099	0.0114	0.0173
	GB2	0.0033	0.0212	0.0176	0.0175	0.0197	0.0138
	dPLN	0.0026	0.0212	0.0174	0.0186	0.0191	0.0131
	EκG1	0.0024	0.0240	0.0177	0.0126	0.0141	0.0086
	EκG2	0.0078	0.0191	0.0163	0.0173	0.0193	0.0136

$$L\text{-RSSE} := \sqrt{\sum_i (l_i - L(\pi_i))^2}$$

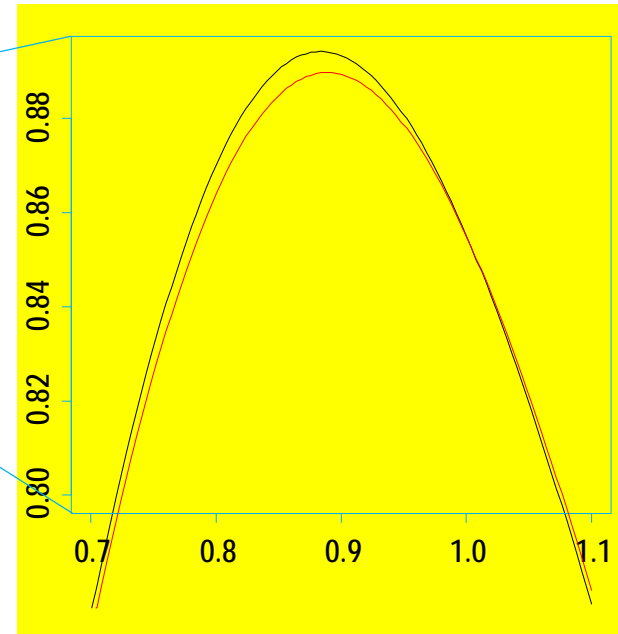
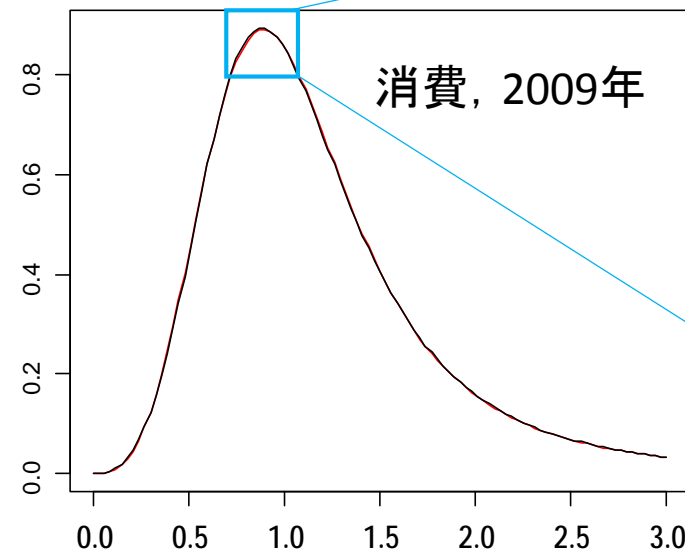
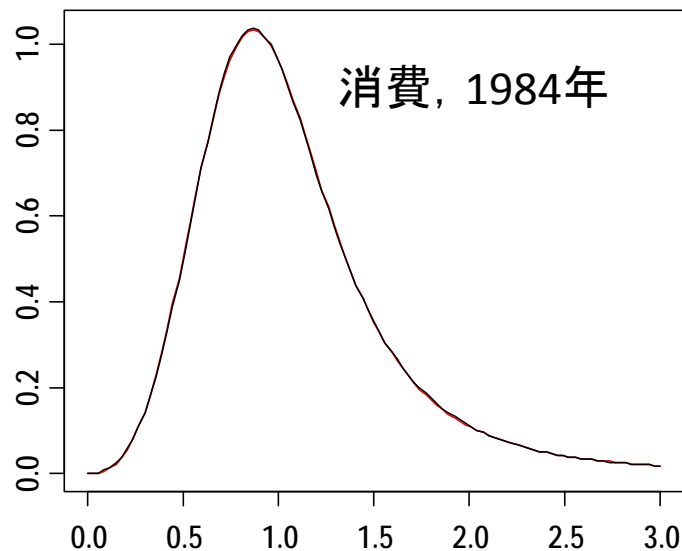
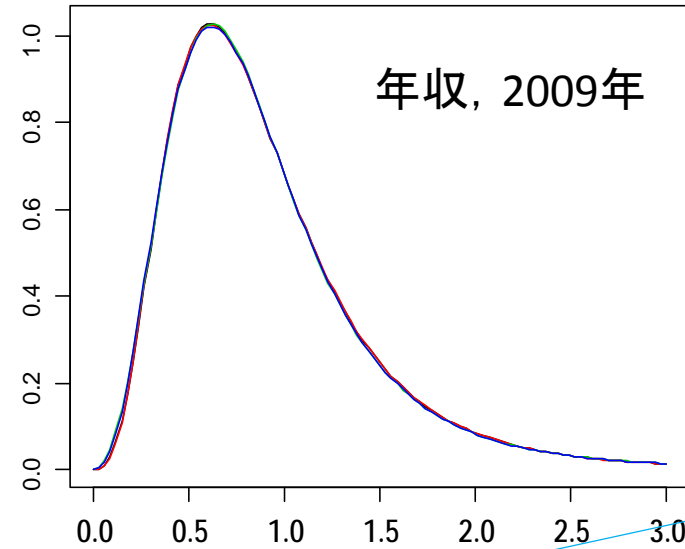
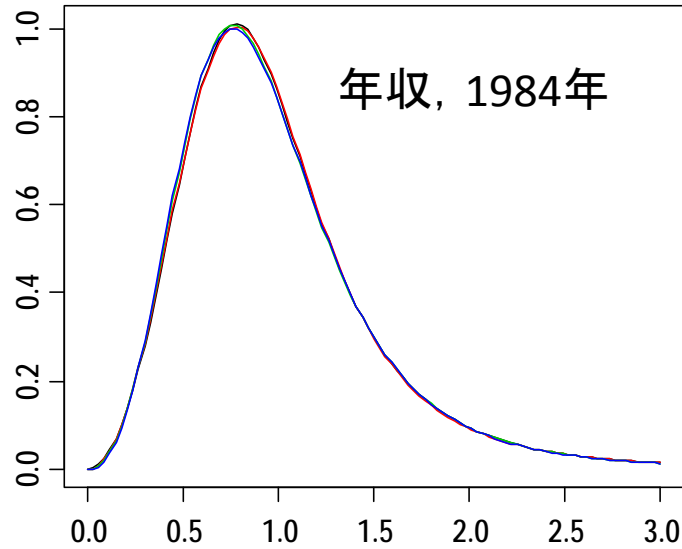
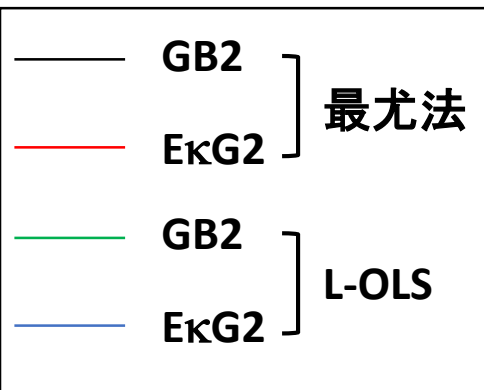
ここで, l_i : 実際の集計値から算出した
累積世帯割合 π_i における累積金額
シェア

$L(\pi_i)$: 当てはめた統計分布モデルか
ら推定される累積世帯割合 π_i における
累積金額シェア

尤度が大きいモデルのL-RSSEが必
ずしも小さいとはいえない
⇒ ジニ係数の推定精度が必ずしも
良いとは限らないことに留意

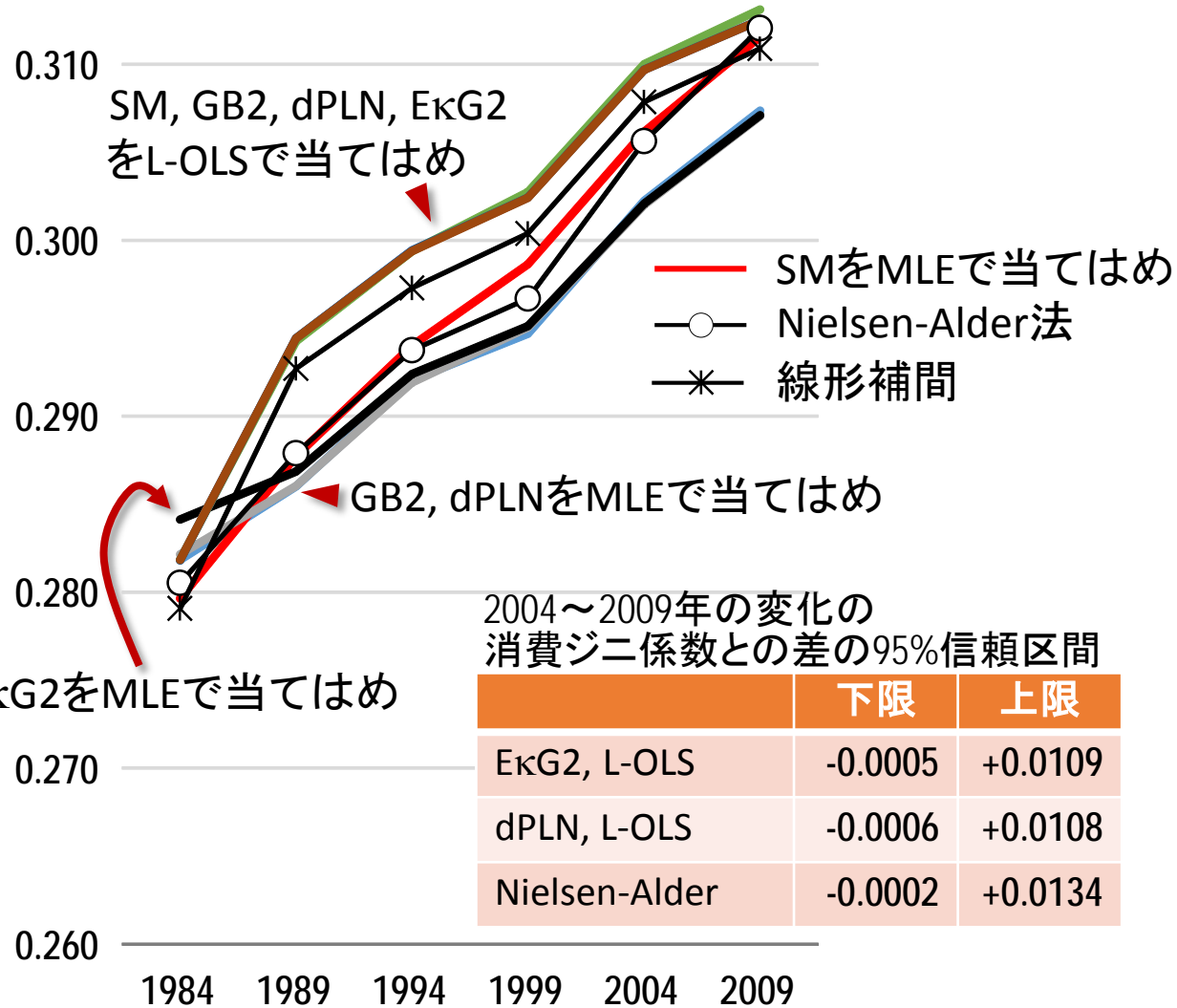
GB2とEκG2による所得と消費の世帯分布密度推定結果 (2人以上の世帯)

GB2のスケール・パラメータ b が1になるよう基準化して表示



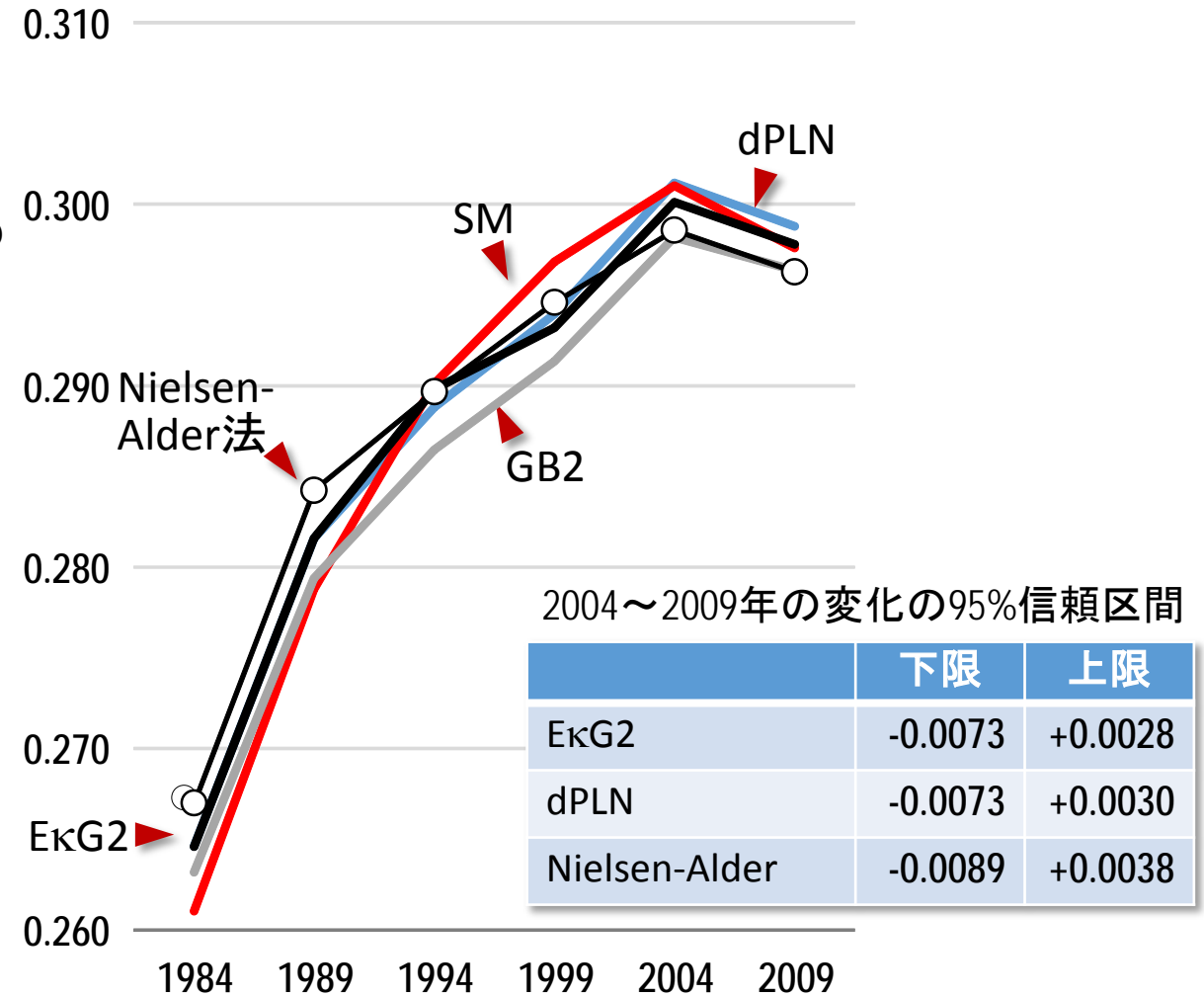
ジニ係数の推定結果

年収分布(2人以上の世帯)



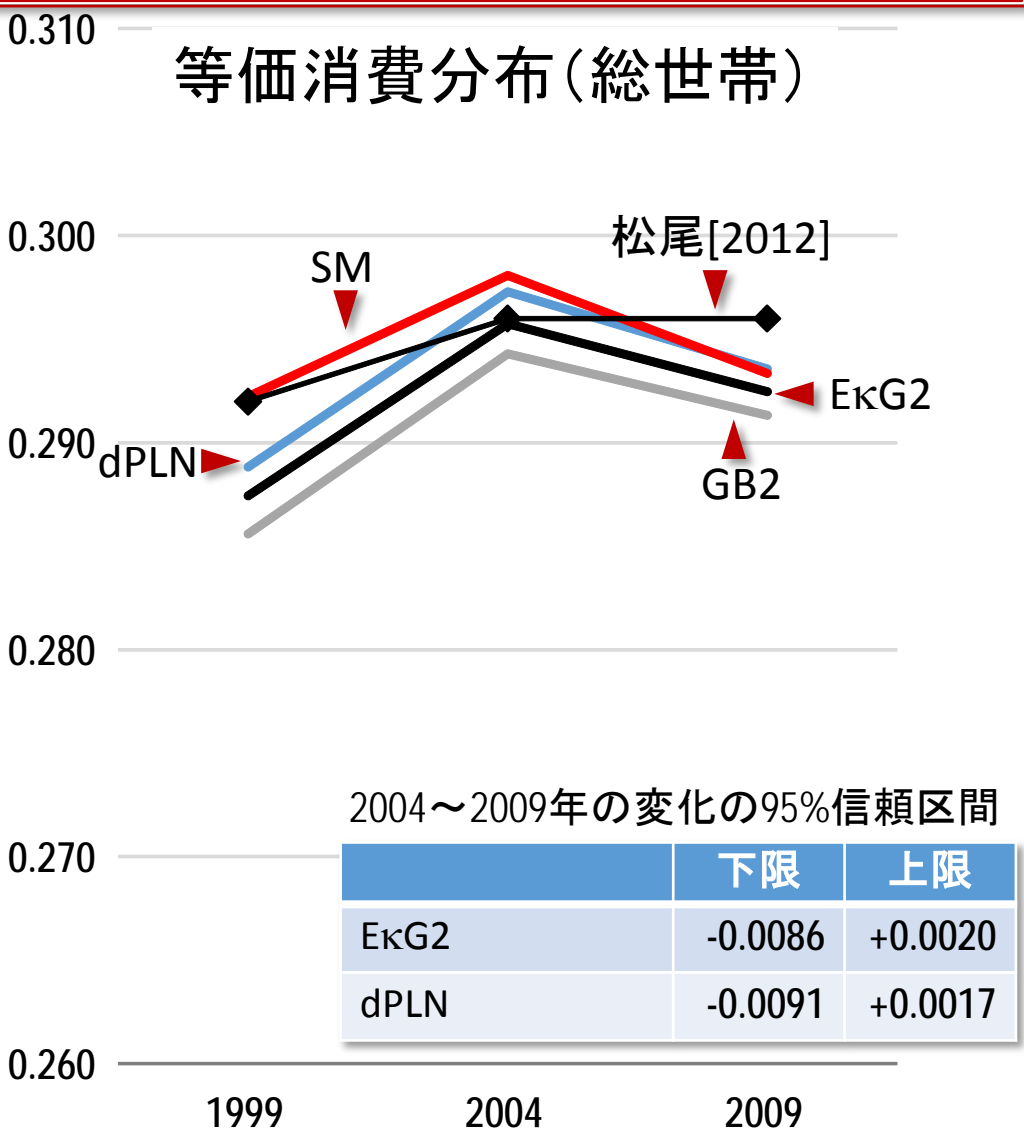
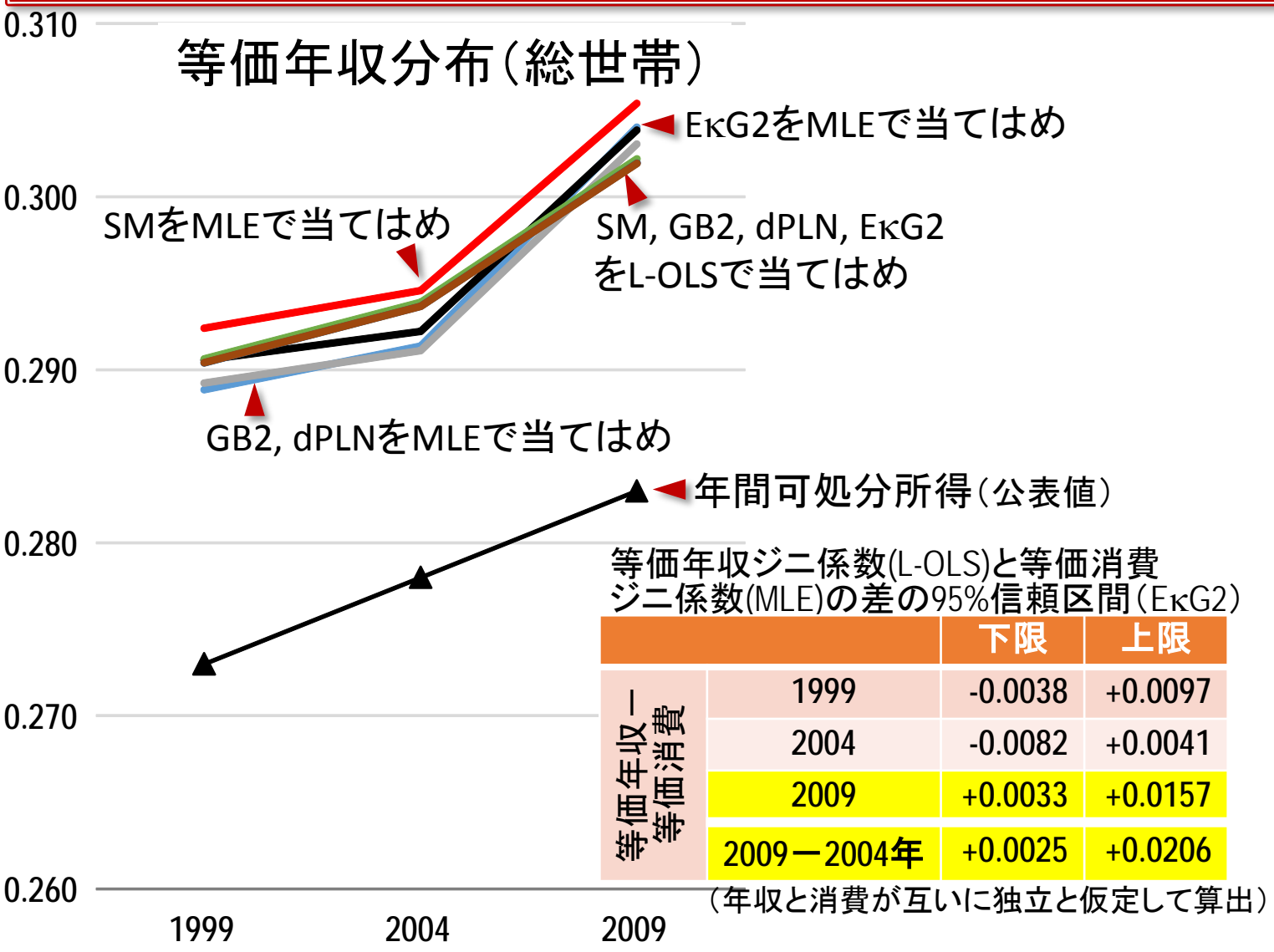
L-OLSは、L-RSSEを最小化する当てはめ法

消費分布(2人以上の世帯)



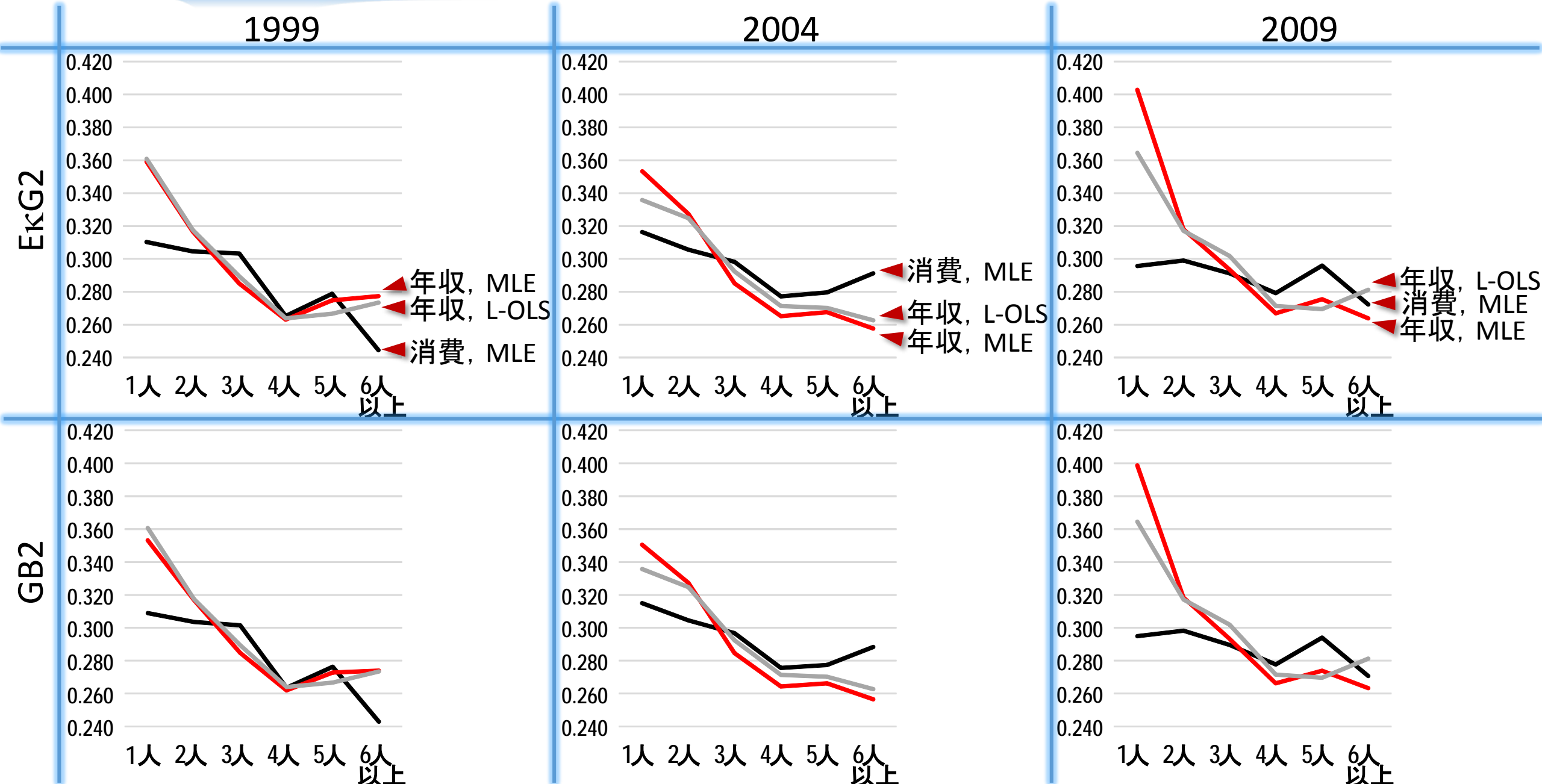
消費分布については、統計分布モデルの当てはめは最尤法(MLE)のみ

所得分布のジニ係数は上昇が続く，消費分布のジニ係数は2009年に低下若しくは横這い？
このため，等価年収と概ね同水準であった等価消費のジニ係数は，2009年に等価年収を下回った？

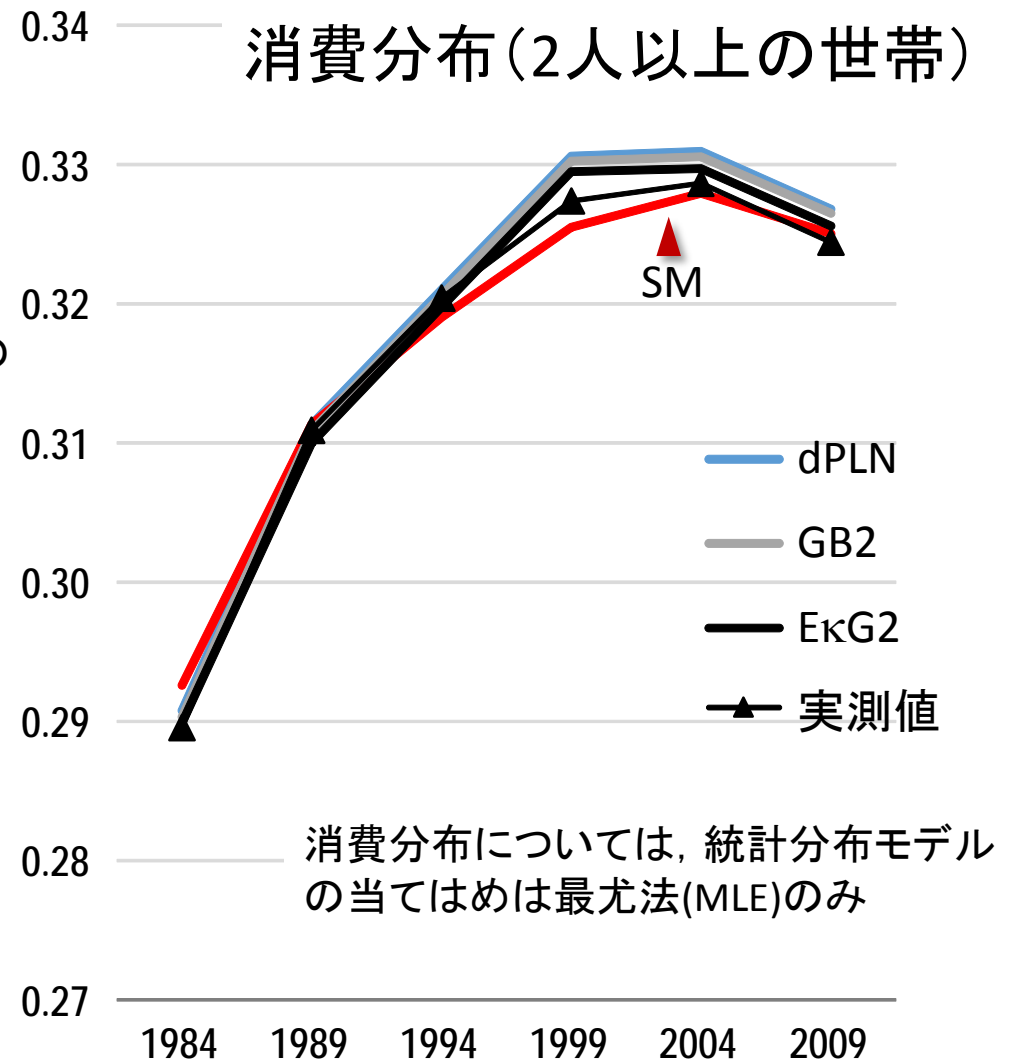
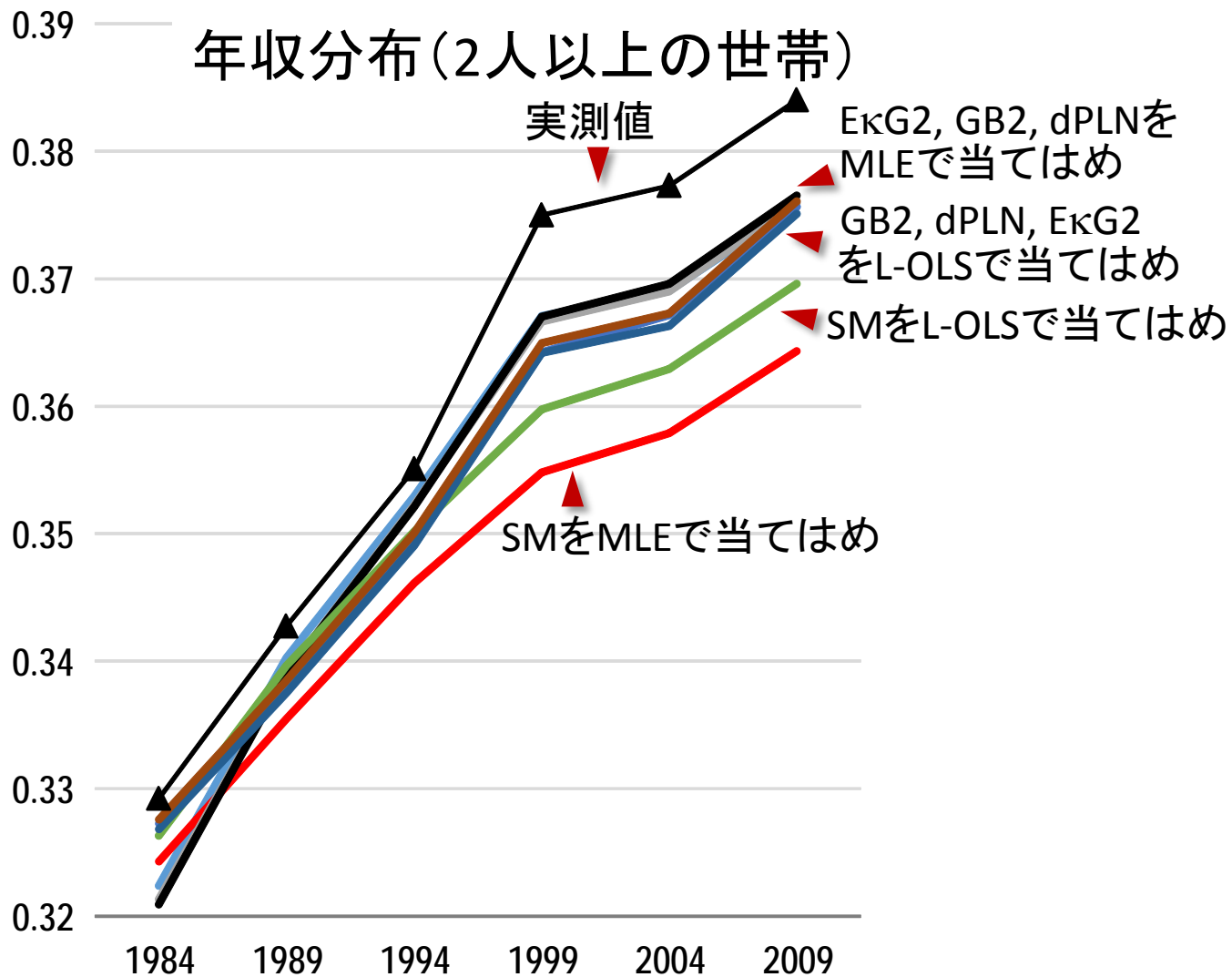


世帯人員別にMLEで（所得についてはL-OLSでも）当てはめ，世帯人員の平方根で除した等価所得・消費のジニ係数を推定

世帯人員別ジニ係数の推定結果



四分位分散係数の推移



世帯主の年齢階級別ジニ係数の推定結果(EκG2)

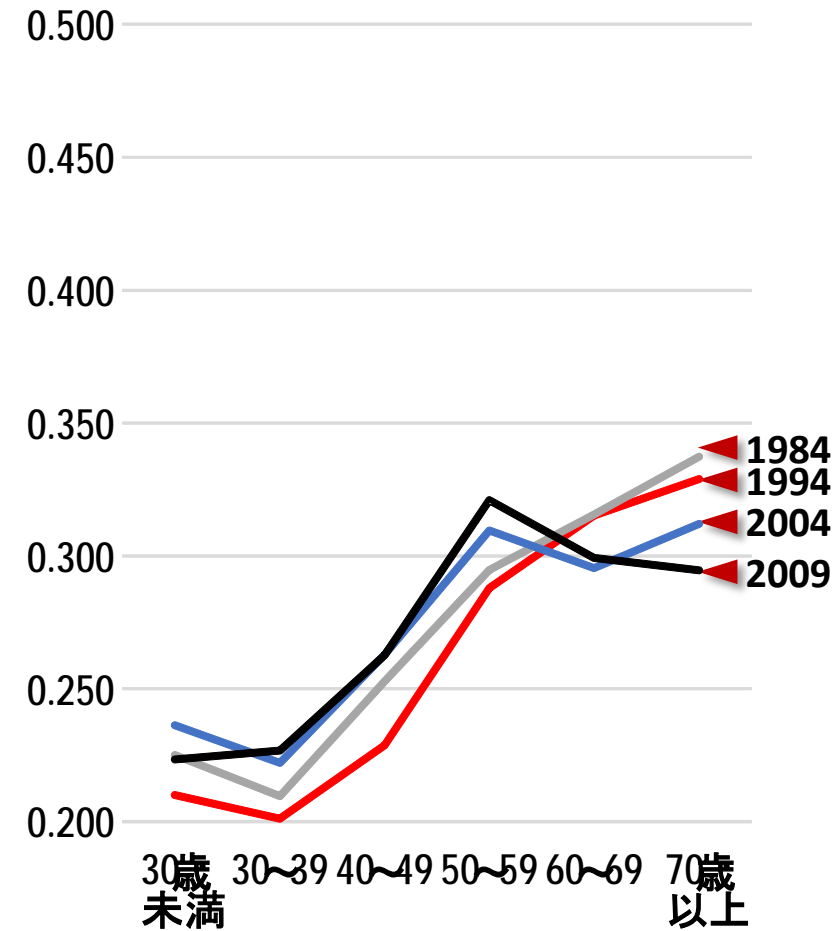
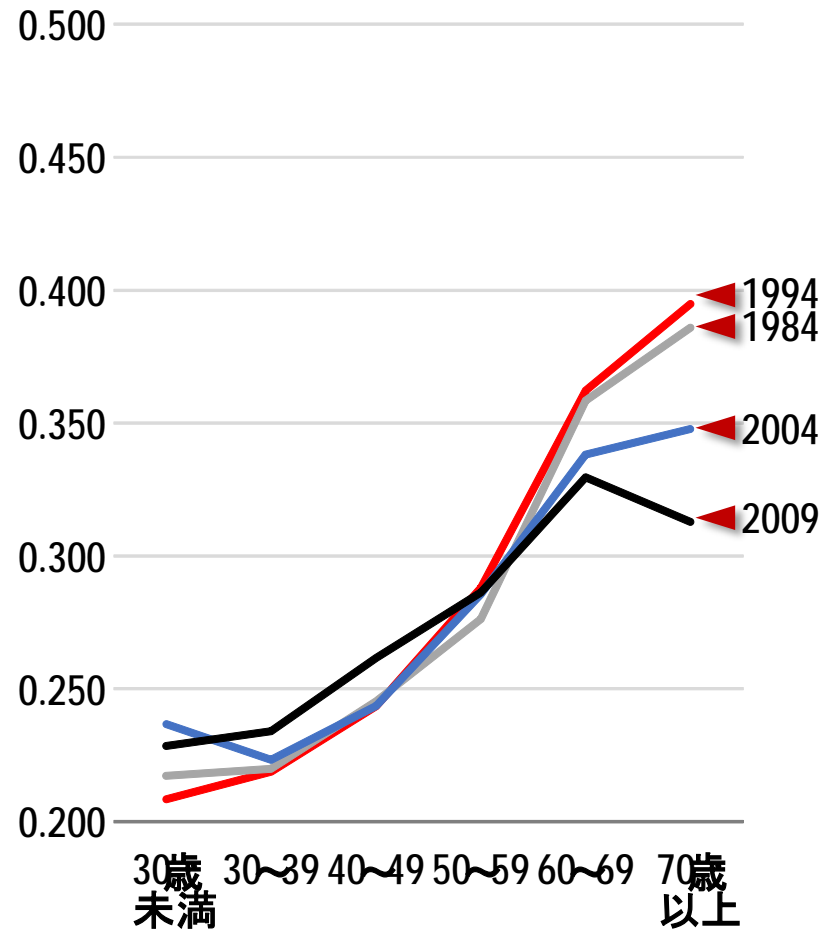
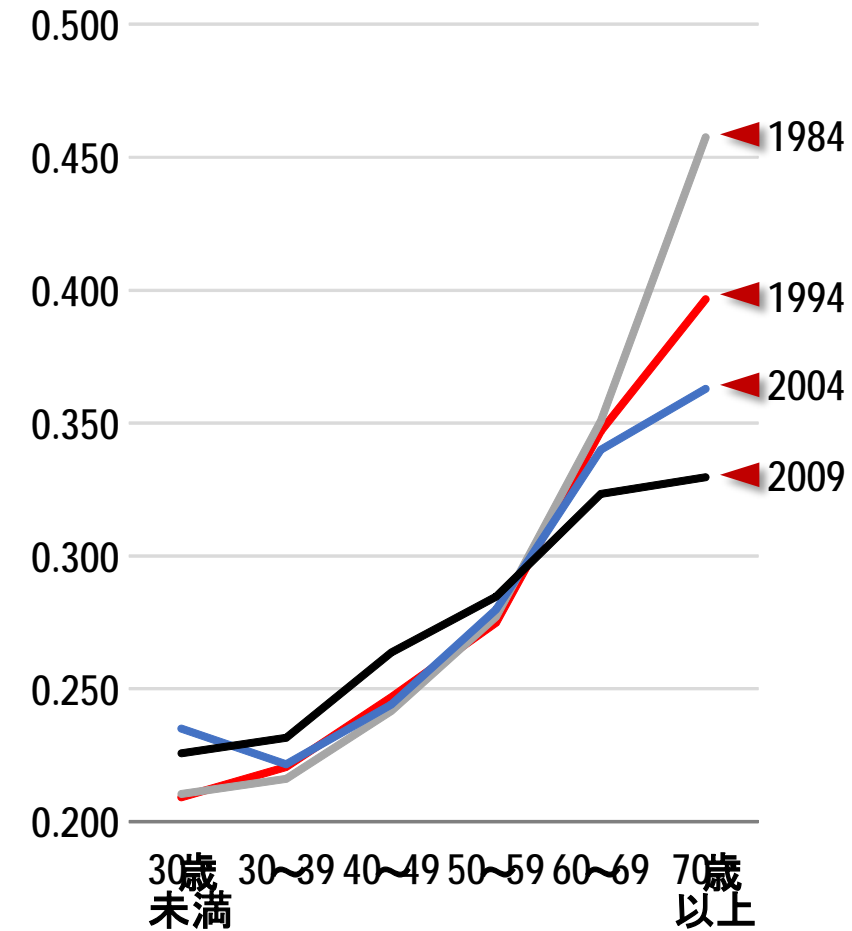
年収分布(2人以上の世帯)

MLE

L-OLS

消費分布(2人以上の世帯)

MLE



世帯主の年齢階級別ジニ係数の推定結果(GB2)

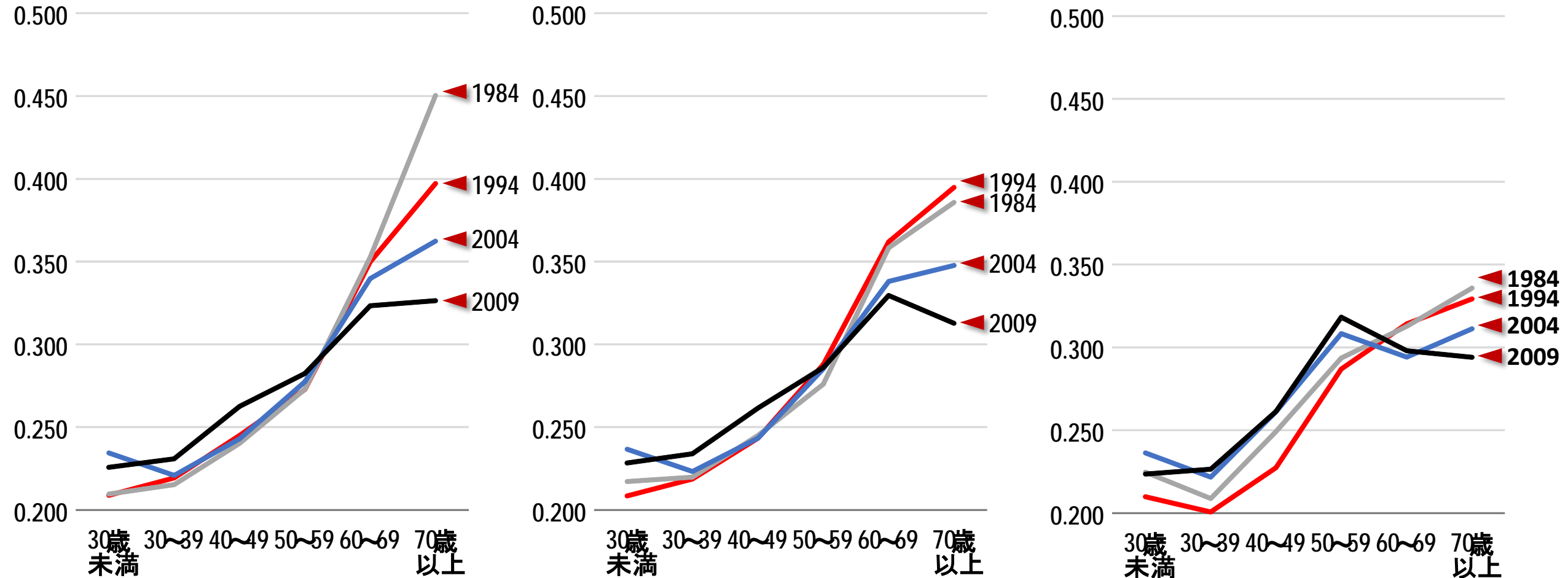
年収分布(2人以上の世帯)

MLE

L-OLS

消費分布(2人以上の世帯)

MLE



世帯主の年齢階級別四分位分散係数の 実測値と推定結果(EκG2)

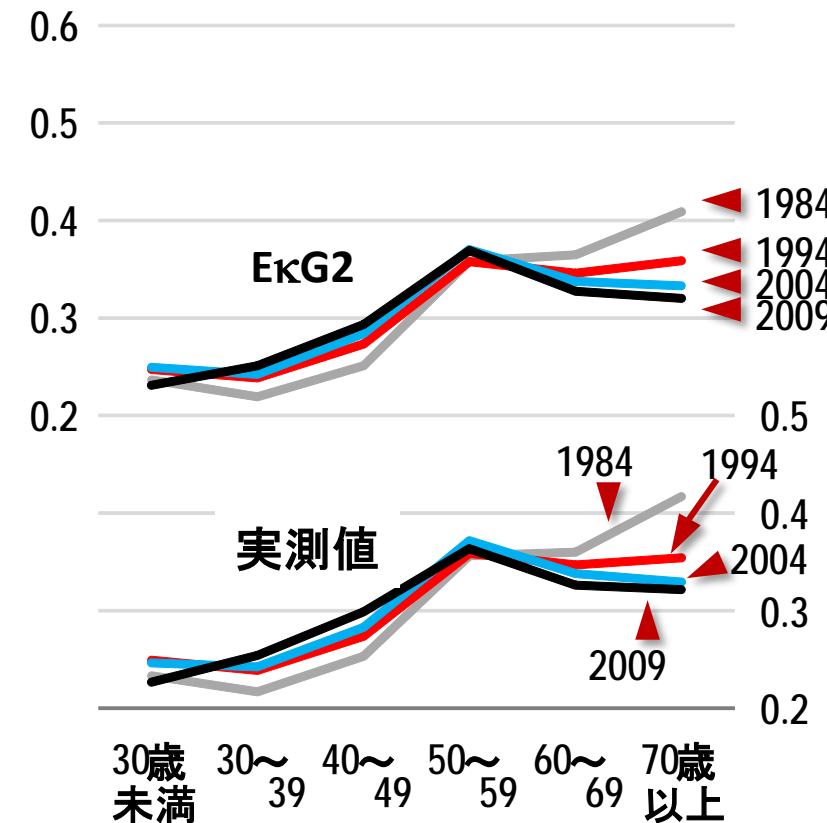
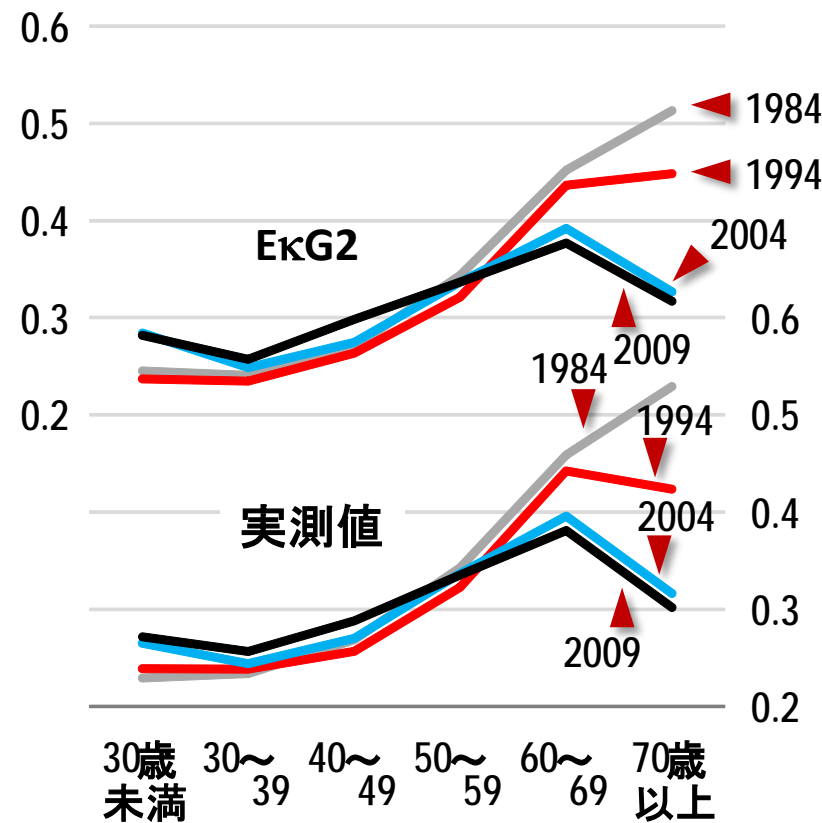
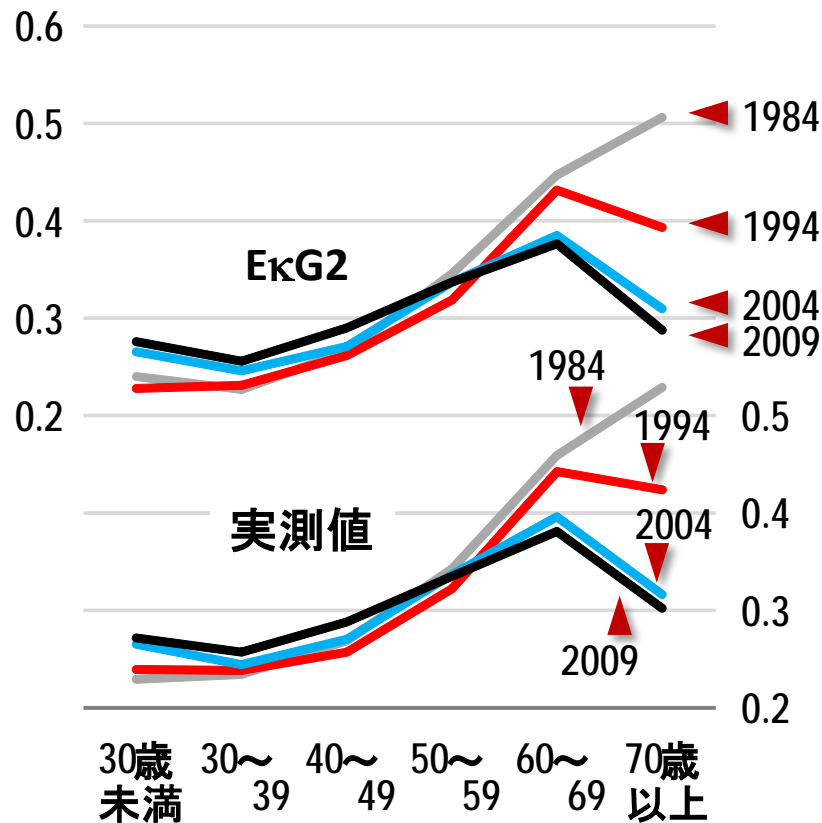
年収分布(2人以上の世帯)

MLE

L-OLS

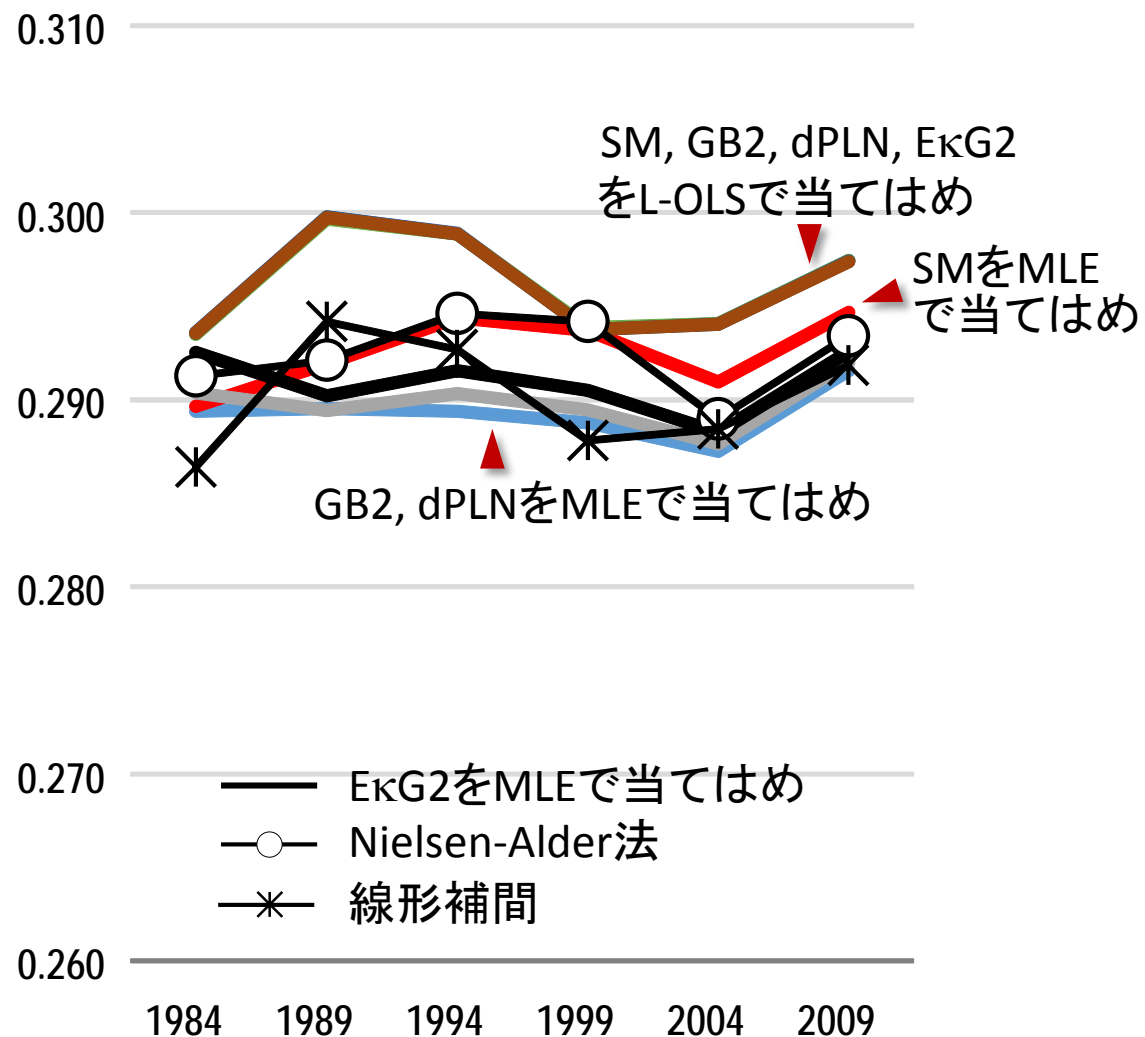
消費分布(2人以上の世帯)

MLE

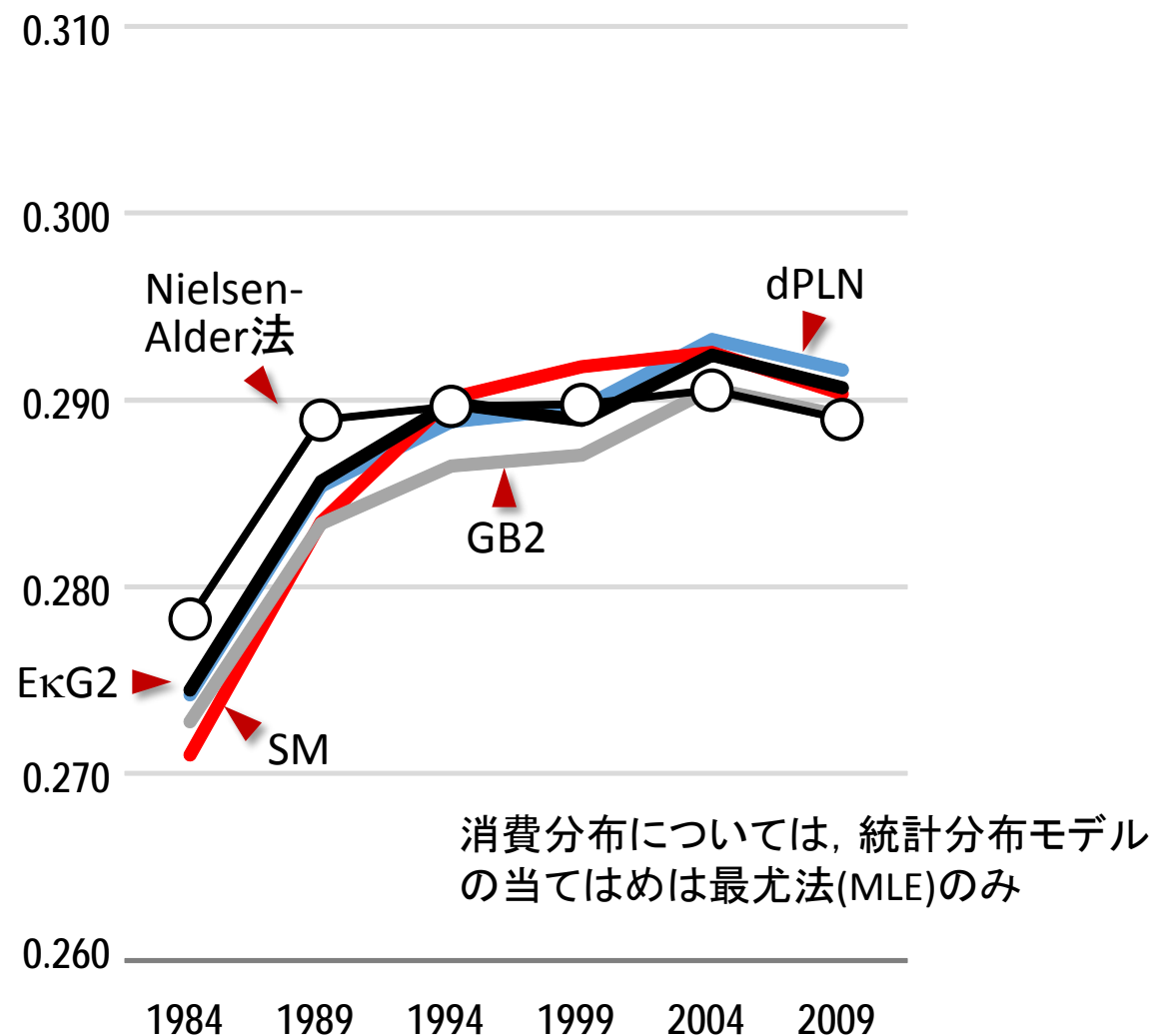


年齢分布を標準化した場合のジニ係数の推定結果

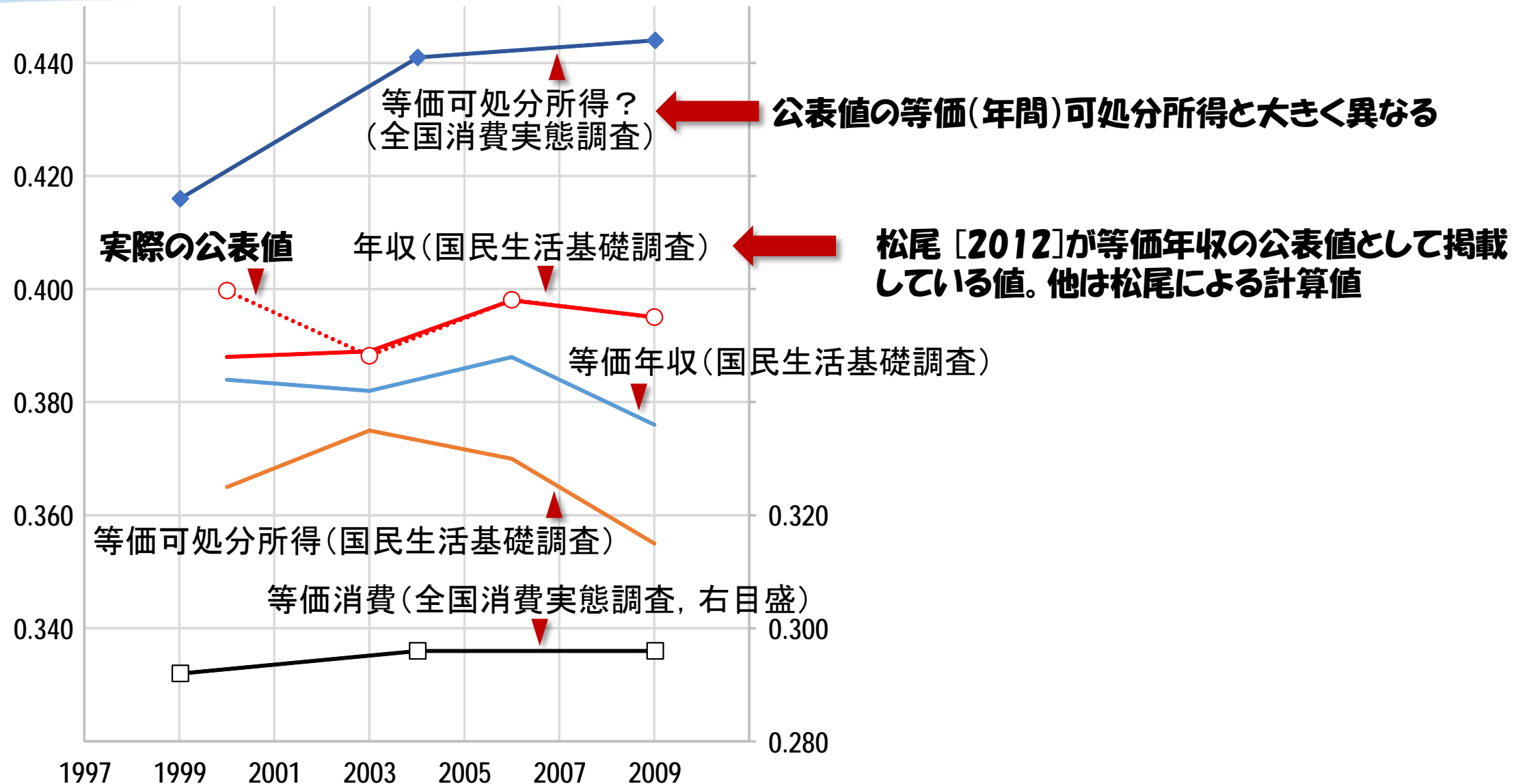
年収分布(2人以上の世帯)



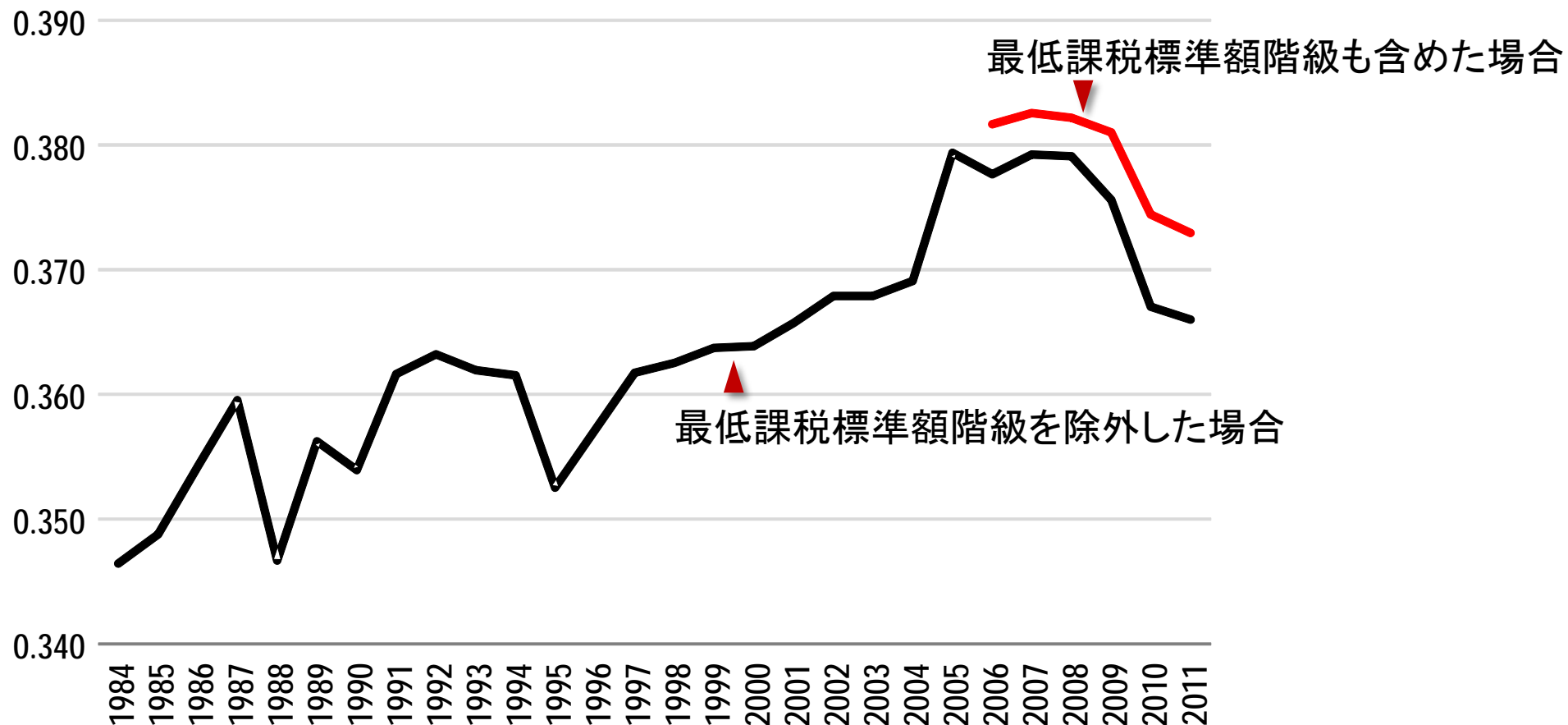
消費分布(2人以上の世帯)



既存研究における所得分布と消費分布のジニ係数の推移



課税標準額階級別課税対象所得の準ジニ係数の推移

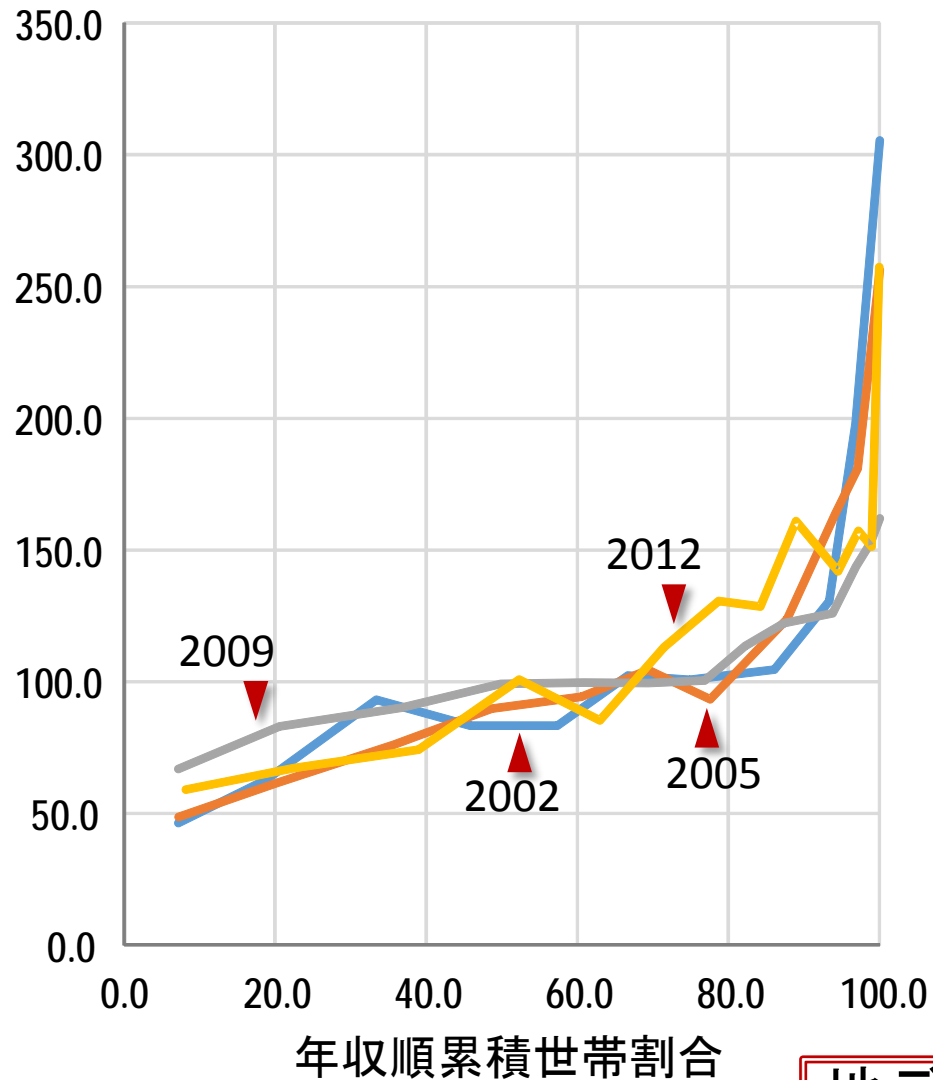


『個人所得指標』の「所得段階別分布－所得者総合」の表から算出

所得分布のジニ係数も低下に転じた？

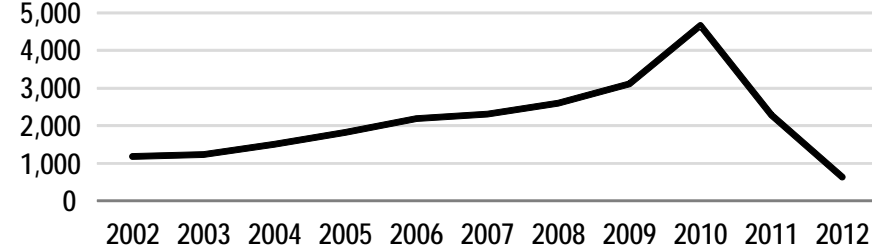
年収階級，世帯主の年齢階級別テレビの購入状況

年収階級別テレビ購入額（平均=100）

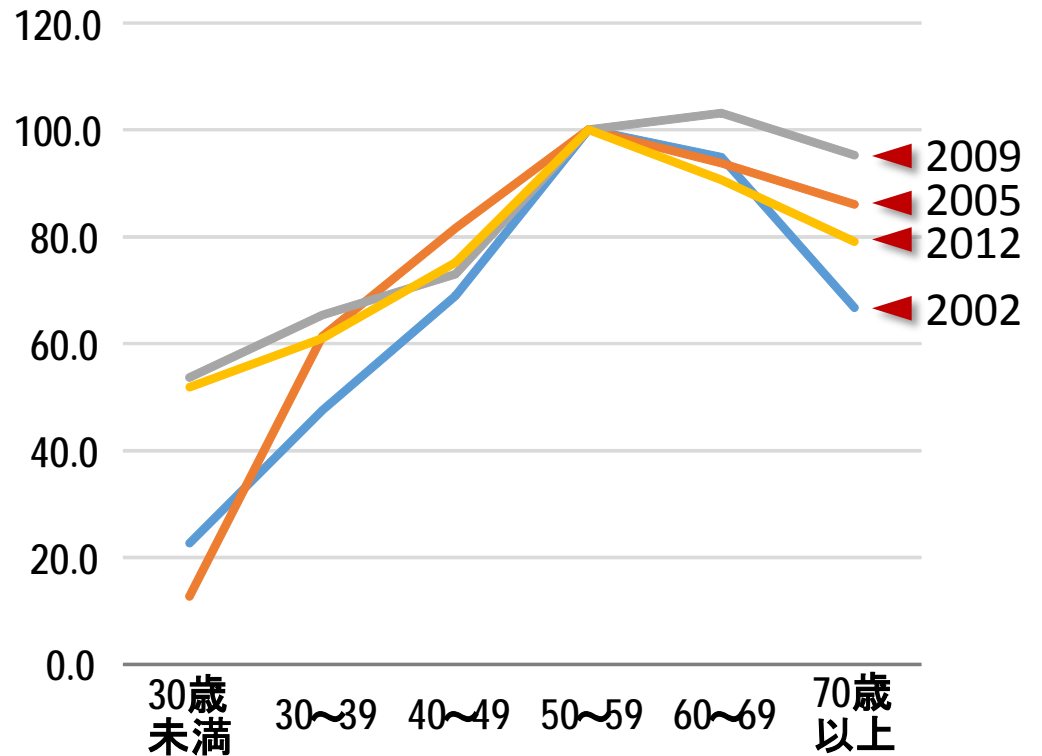


家計消費状況調査，2人以上の世帯

テレビ購入額の推移（月平均金額）



世帯主の年齢階級別テレビ購入額（50～59歳=100）



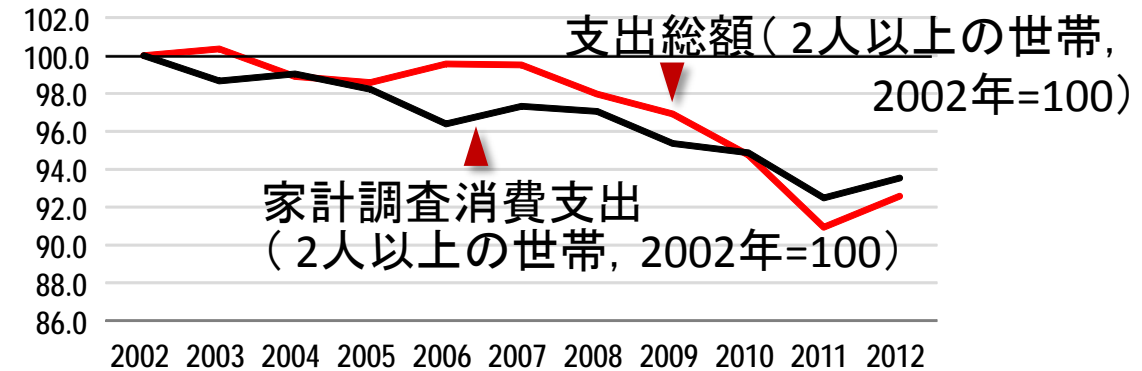
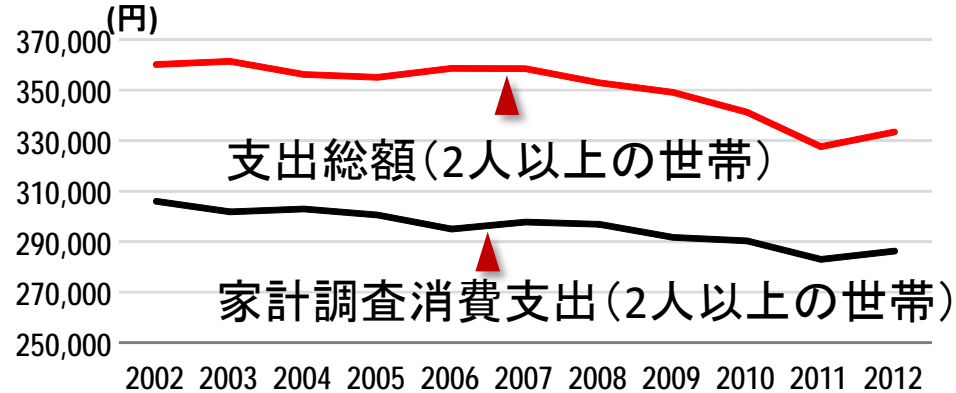
地デジ化前に低所得層・高齢層のテレビ購入が相対的に増加
消費格差の縮小に寄与？

消費格差・貧困の計測上の課題



1年以上の期間の世帯の消費支出

家計消費状況調査の「支出総額」の利用可能性？



持家の帰属家賃(及び自動車購入費の減価償却費への置換え)

現行の家計消費状況調査の調査事項では推計不可

全消であれば可能

全国消費実態調査では消費支出に含めていないが持家の帰属家賃を推計
ただし、CPIの持家の帰属家賃ウェイトの作成を主目的として推計を行っている
ため、平均レベルの推計としては問題ないとしても、各持家世帯の帰属家賃の
正確な推計とは言えない可能性がある。推計方法の改善が必要？

給与住宅(さらには公営借家も?)に住む世帯についても、現物給付分を考
慮することが望ましい



耐久消費財など高額支出を除外した場合との比較



仕送り金, 贈与金などの移転支出の除外

住居の所有関係別家計の状況

	持家	帰属家賃を含めた場合	民営借家 (設備専用)	公営借家	給与住宅	帰属家賃を* 含めた場合
世帯人員(人)	3.45		3.12	3.12	3.38	
現住居の延べ床面積(㎡)	127.8		63.9	59.6	69.9	
可処分所得(円)	414,260	495,110	336,454	284,047	398,131	462,911
消費支出(円)	330,773	403,363	294,258	257,555	321,870	358,274
食料(円)	73,590		56,526	57,825	71,326	71,326
住居(円)	8,701	81,291	63,218	39,602	28,376	64,780
持家の帰属家賃(円)	80,850					
土地家屋借金返済(円)	41,064		2,223	422	4,073	
エンゲル係数(%)	22.2	18.2	19.2	22.5	22.2	19.9
平均消費性向(%)	79.8	81.5	87.5	90.7	80.8	77.4

* 民営借家の家賃を現住居の延べ床面積の比の平方根で調整して給与住宅の帰属家賃とした試算値(給与住宅については、勤め先からの住宅に関する現物給付分が含まれていないことに留意)

米国における所得格差と消費格差に関する論争

 Heathcote, Perri and Violante [2010], Krueger and Perri [2005]など

所得格差は1970年代以降大幅に上昇してるが、消費格差の上昇は非常に小幅

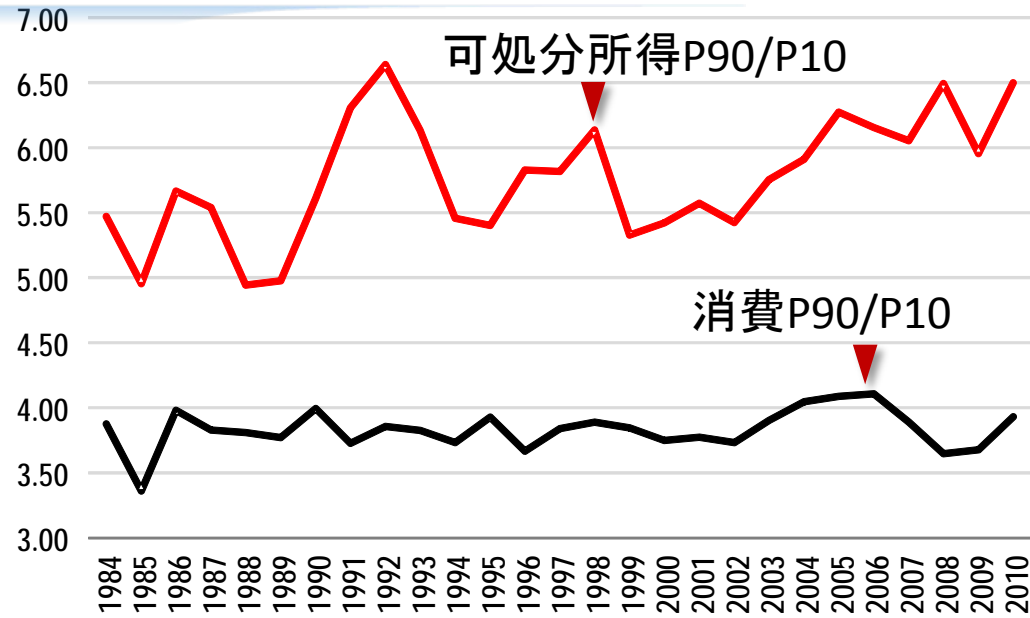
 Aguiar and Bils [2010], Attanasio, Hurst and Pistaferri [2012]など

Consumer Expenditure Survey (の面接調査データ) から算出した消費格差が上昇していないのは計測誤差によるもので、実際には所得格差と同程度に上昇している

 Fisher, Johnson and Smeeding [2012]

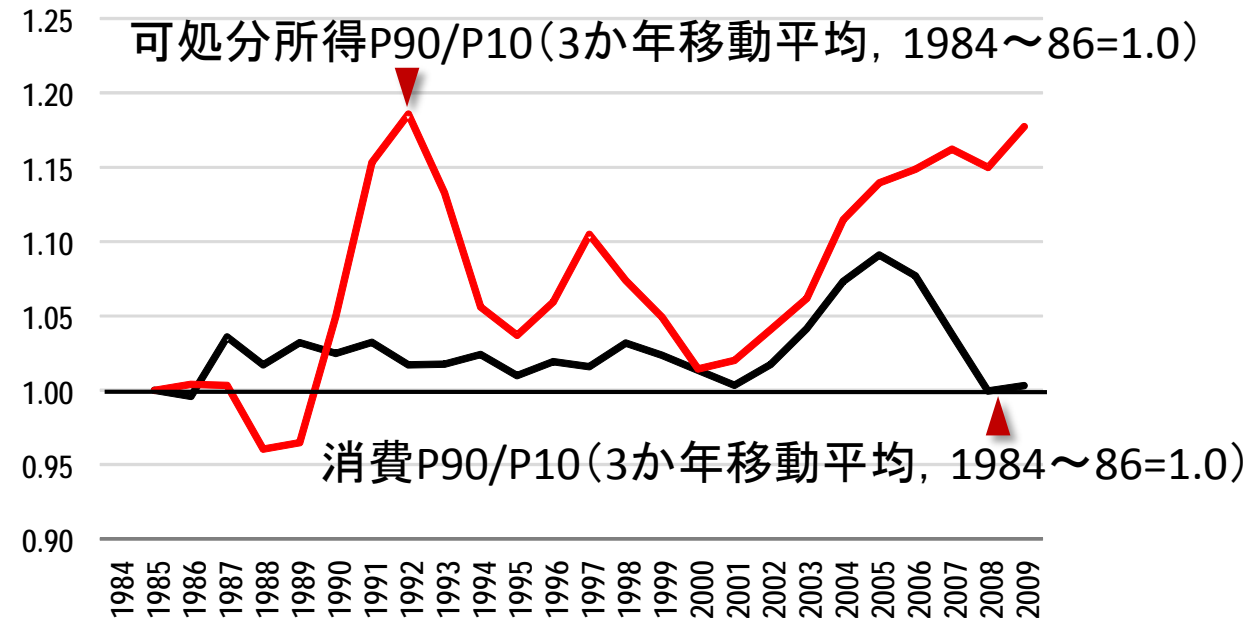
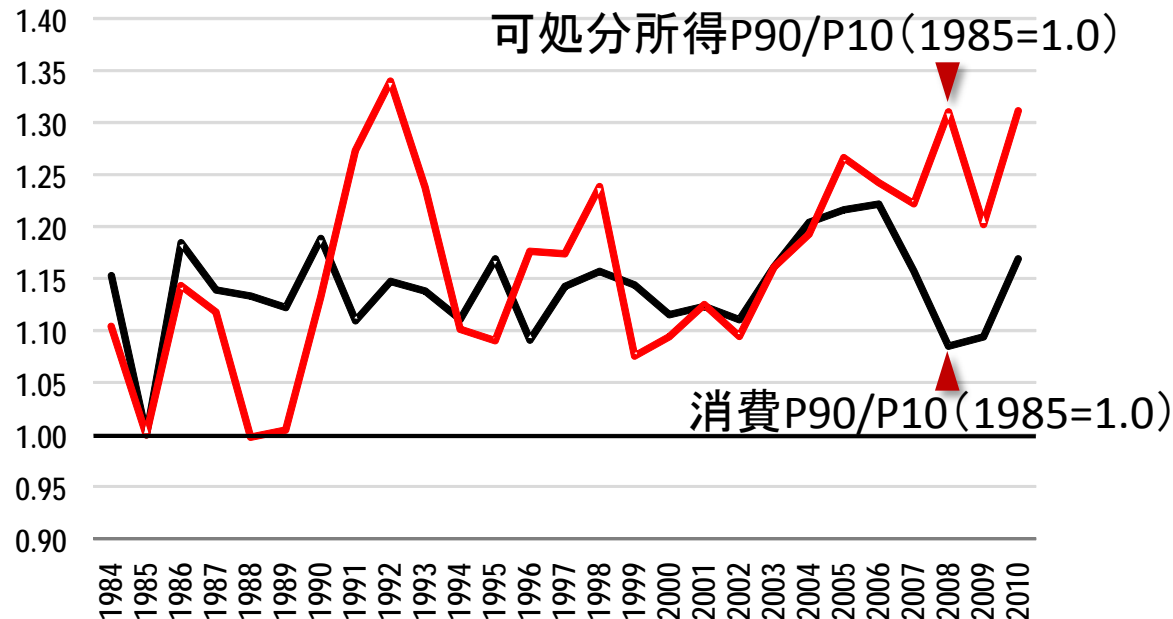
Consumer Expenditure Survey データを適切に処理してから推計を行うと、少なくとも1980年代半ばからリーマンショック前の間は所得格差と消費格差の上昇は同程度

米国における所得格差と消費格差の推移



Fisher, Johnson and Smeeding [2012]に掲載された表から算出
元データはConsumer Expenditure Survey (CES)

1980年代半ばからリーマンショック前までの期間でみると所得格差と消費格差の上昇率は計算上同程度でこれがFisher *et al.* [2012]の主張の根拠となっているが、2000年代前半の消費格差の上昇は一時的なもので(バブル?), この時期を除くと消費格差は横這いで推移しているようにもみえる。



ジニ係数の場合

Fisher, Johnson and Smeeding [2012]のFigure 8参照

Krueger and Perri [2005]のFigure 1参照

参 考 文 献

- 大竹文雄 [2003]. 所得格差の拡大はあったのか, 樋口美雄, 財務総合政策研究所編『日本の格差社会と社会階層』, 日本評論社.
- JPS [1985~2013]. 『個人所得指標』, JPS.
- 松尾浩平 [2012]. 所得・消費から見た日本の不平等度, *PRI Discussion Paper*, No. 12A-07.
(http://www.mof.go.jp/pri/research/discussion_paper/ron236.pdf)
- Aguiar, M., and Bils, M. [2011]. Has Consumption Inequality Mirrored Income Inequality, *NBER Working Paper*, No. 16807.
- Attanasio, O., Hurst, E., and Pistaferri, L. [2012]. The Evolution of Income, Consumption, and Leisure Inequality in the US, 1980-2010, *NBER Working Paper*, No. 17982.
- Citro, C. F., and Michael, R. T. (eds.) [1995]. *Measuring Poverty: A New Approach*, Washington, D.C.: National Academic Press.
- Clementi, F., Gallegati, M., and Kaniadakis, G. [2007]. κ -generalized Statistics in Personal Income Distribution, *European Physical Journal B*, **52**, 187–193.
- Fisher, J., Johnson, D. S., and Smeeding, T. M. [2012]. Inequality of Income and Consumption: Measuring the Trends in Inequality from 1985-2010 for the Same Individuals, *paper prepared for the 32nd General Conference of the International Association for Research in Income and Wealth*, Boston, 2012.
(<http://www.iariw.org/papers/2012/FisherPaper.pdf>)
- Heathcote, J., Perri, F., and Violante, G. L. [2010]. Unequal We Stand: An Empirical Analysis of Economic Inequality in the United States, 1967-2006, *Review of Economic Dynamics*, **13**, 15–51.
- Kaniadakis, G., Lissia, M., and Scarfone, A. M. [2004]. Deformed Logarithms and Entropies, *Physica A*, **340**, 41 – 49.
- Krueger, D., and Perri, F. [2005]. Does Income Inequality Lead to Consumption Inequality? Evidence and Theory, *Review of Economic Studies*, **73**, 163–193.

- McDonald, J. B. [1984]. Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income, *Econometrica*, **52**, 64 –665.
- Nielsen, F., and Alderson, A. S. [1997]. The Kuznets Curve and the Great U-turn: Income Inequality in U.S. Counties, 1970 to 1990, *American Sociological Review*, **62**, 12–33.
- Okamoto, M. [2012]. Evaluation of the Goodness of Fit of New Statistical Size Distributions with Consideration of Accurate Income Inequality Estimation, *Economics Bulletin*, **32**, 2969–2982.
 (<http://www.accessecon.com/includes/CountdownloadPDF.aspx?PaperID=EB-12-00636>)
- [2013]. Erratum to “Evaluation of the Goodness of Fit of New Statistical Size Distributions with Consideration of Accurate Income Inequality Estimation”, *mimeo*.
 (http://www.geocities.jp/stat_okamoto/)
- Extension of the κ -generalized Distribution: New Four-Parameter Models for the Size Distribution of Income and Consumption, *LIS Working Paper*. (to appear)
- Reed, W. J. [2003]. The Pareto Law of Incomes – an Explanation and an Extension, *Physica A*, 319, 579–597.
- Reed, W. J., and Wu, F. [2008]. New Four- and Five-Parameter Models for Income Distributions, in Chotikapanich, D. (ed.) *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer-Verlag, 211–223.