

消費者物価の統合算式

岡本 政人

多種多様な商品やサービスの価格の変動を総合化することは、物価全体の動向を把握するために必要不可欠である。これまで様々な統合方法が考え出され、どれが適切か研究されてきた。統合の方法論として最初に明確に認識されたのは固定バスケット法である。最も有名な指数算式はこの方法に属し、現在も一般的な統合方法といえる。

固定バスケット法

各品目の購入量を規定した基準バスケットを考え、このバスケット全体の購入費用の変動を測定する方法で、次の算式で表される。

$$I = \frac{\sum_i p_i^t q_i^b}{\sum_i p_i^0 q_i^b} \quad (1)$$

ここで、 $\{q_i^b\}_i$ は基準バスケット、 $\{p_i^0\}_i$ 、 $\{p_i^t\}_i$ は各々時点 0、 t における品目の価格で、この算式により基準時 0 から比較時 t の物価変動率が算出される。

基準バスケットは統合化の目的・対象に依存する。消費者物価の場合、世帯が消費する品目の平均購入量で構成される。固定バスケット法を明確化したロウに因んで、CPI マニュアルでは(1)をロウ指数と呼んでいる（“純粋”物価指数と呼ぶこともある）。家計調査が実施されるようになると、どの時点の平均購入量を用いるかが考慮されるようになった。基準時及び比較時の平均購入量をバスケットする方式が各々ラスパイレズ指数、パーシェ指数（以下、 I_L 、 I_P と略記）と呼ばれる今日最もよく知られている指数算式である。実際には、同

じ品目でも多種類の商品・サービスが含まれるため、代表的な銘柄の価格変動を統合する。そこで両指数とも、次のように各品目の金額シェアで加重する表現形式に変形して用いられる。

$$I_L = \frac{\sum_i p_i^t q_i^0}{\sum_i p_i^0 q_i^0} = \frac{1}{\sum_i w_i^0} \sum_i w_i^0 \frac{p_i^t}{p_i^0} = \sum_i s_i^0 \frac{p_i^t}{p_i^0} \quad (2)$$

$$I_P = \frac{\sum_i p_i^t q_i^t}{\sum_i p_i^0 q_i^t} = \sum_i w_i^t \frac{1}{\sum_i w_i^t / \frac{p_i^t}{p_i^0}} = \frac{1}{\sum_i s_i^t / \frac{p_i^t}{p_i^0}} \quad (3)$$

ここで、 $w_i^* = p_i^* q_i^*$ は各品目の平均購入額、 $s_i^* = w_i^* / \sum_i w_i^*$ は各品目の金額シェアを表す。このほか、基準時と比較時の購入量の平均を基準バスケットとする算式も考え出された。

$$I_W = \frac{\sum_i p_i^t \sqrt{q_i^0 q_i^t}}{\sum_i p_i^0 \sqrt{q_i^0 q_i^t}} = \frac{\sum_i \sqrt{s_i^0 s_i^t} \sqrt{\frac{p_i^t}{p_i^0}}}{\sum_i \sqrt{s_i^0 s_i^t} / \sqrt{\frac{p_i^t}{p_i^0}}} \quad (4)$$

$$I_E = \frac{\sum_i p_i^t \frac{q_i^0 + q_i^t}{2}}{\sum_i p_i^0 \frac{q_i^0 + q_i^t}{2}} = \frac{\sum_i w_i^0 \frac{p_i^t}{p_i^0} + w_i^t}{\sum_i w_i^0 + w_i^t / \frac{p_i^t}{p_i^0}} \quad (5)$$

(4)はウォルシュ指数（以下、 I_W と略記）、(5)はマーシャル・エッジワース指数（以下、 I_E と略記）と呼ばれている。このほか固定バスケット法に属さない指数算式も考え出されるようになり、どの指数算式が適切なのか議論されてきた。

公理的アプローチ（テスト・アプローチ）

指数算式がもつことが望ましい性質を公理として定義し、これらを満たす指数算式がよいとする

考え方である。フィッシャーが定義した公理が特に有名である。本稿の説明で重要となる5つの公理を挙げる。

① 比例性テスト

比較時の各品目の価格が一律に k 倍になったとき、指数も k 倍になる。

② 算出可能性 (Determinateness) テスト

ある品目の価格がゼロになった場合でも、指数はゼロ、無限大あるいは不定とならない。

③ 要素転逆テスト

指数算式の価格 p_i と数量 q_i を入れ替えた数量指数と元の物価指数の積は購入額総額の変動率に一致する。

④ 時点転逆テスト

基準時 0 と比較時 t を入れ替えた指数は、元の指数の逆数になる。

⑤ 循環性テスト

基準時 0 、比較時 t の指数と基準時 t 、比較時 u の指数の積は、基準時 0 、比較時 u の指数と一致する。

①は、一見自然な要請に見えるが、各品目の価格が一律に k 倍に上昇したとしても、世帯は、食料などの必需品よりも嗜好品の購入を減らすため、指数が k 倍に上昇することは必ずしも望ましい性質とは言えない。しかし、比較時が基準時からそれ程経過していない範囲では近似的に成立するとみなしてよいであろう。固定バスケット法や次節の生計費アプローチで良いとされ一般的に使われている殆どの指数算式は①を満たす。②は、実用面からの要請で、後述の幾何平均タイプの算式はこれを満たさない。③と④はフィッシャーが最も重視した公理で、これらを満たし理想的な算式とされたのが I_L と I_P の幾何平均をとるフィッシャーの理想指数（以下、 I_F と略記）である。

$$I_F = \sqrt{I_L \cdot I_P} \quad (6)$$

I_F を含め、実際に使うことのできる全ての算式は⑤の循環性を満たさない。フィッシャーは⑤を重視しなかったが、後述するように、⑤に近い性質を有するか否かが今日では重要になってきている。

全ての公理を満たす指数算式は無く、どの公理が重視されるべきか必ずしも明確でないことから、公理的アプローチのみで適切な指数算式を選択してよいか論争の余地がある。直観的に奇異にみえ実用されないステューベル指数は①を除き、③及び④など I_F と同じ公理を満たし、 I_F が満たさない総合 (aggregation) に関する公理を満たす。しかし、適切な算式であるか疑問を提起させる事例である

経済学的アプローチ（生計費アプローチ）

世帯は、最小の費用で最大の効用を得よう行動するとみなし、同じ水準の効用を得るのに要する最小費用の変動を物価変動と捉えるのが生計費アプローチである。品目間の価格代替効果を理論的に採り入れている点が特徴であり、効用関数に変化しないという前提の下では、理論生計費指数は I_L を上限、 I_P を下限とする範囲に収まる。実証的には効用関数が（存在していたとしても）変化していないことを示すのは難しいが、通常は変化が小さく、指数は I_P から I_L の範囲が妥当、少なくともこの範囲から大きく外れるべきではないとの考え方が広く受け入れられているといえるであろう。

効用関数に一次同次性と滑らかさの条件を課して望ましい指数算式の範囲を限定したのがディワートである。以下、品目価格 $\{p_i\}_i$ に対し所定の効用水準を達成するのに必要な最小費用を対応させる関数を費用関数と呼ぶ。効用関数と費用関数は双対関係にある。費用関数が k 倍になったとき、指数も k 倍になる、即ち、理論生計費指数と一致する指数算式をエグザクトな指数と呼ぶ。品目の価格が

一律に k 倍になったとき費用関数が k 倍になることを一次同次性という。ディワートは、任意の二階微分可能な一次同次費用関数に対し、二階微分まで一致させることのできる柔軟な費用関数のエグザクトな指数を最良指数 (superlative index) と名付けた。次の指数算式は最良指数である。

$r \neq 0$ の場合：

$$I_r = \left[\sum_i s_i^0 \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{r/2} \right]^{1/r} \left[\sum_i s_i^t \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{-r/2} \right]^{-1/r} \quad (7)$$

$r = 0$ の場合：

$$I_T = e^{\frac{\sum_i s_i^0 + s_i^t}{2} \log \frac{p_i^t}{p_i^0}}$$

$r = 0$ の場合がトゥルンクビスト指数 (以下、 I_T と略記)、 $r = 2$ の場合が I_F 、 $r = 1$ の場合が購入総額の変動率をウォルシュ数量指数で除したインプリシットなウォルシュ物価指数になる。(4)の I_W は、(7)で p_i^* を q_i^* に置き換えた数量指数に関する最良指数からインプリシットに導出できる。(7)に対応する費用関数は省略するが品目価格の r 次平方平均、 $r = 0$ の場合トランス・ログ関数になる。なお、(5)の I_E は、最良指数に近いが、最良指数ではなく、基準時と比較時の購入総額の差が大きいとその影響を受けるため好ましくないとされている。

r は負の値も含めて任意で、最良指数が無数に存在することを分かるが、全ての最良指数は、基準時において p_i^* 及び q_i^* に関する二階偏微分まで一致するため、比較時が基準時からそれ程経過していない範囲では異なる最良指数の差は小さいと予想される。しかし、ロバート・ヒルは、 $0 \leq r \leq 2$ 以外の(7)の最良指数は、 I_P から I_L の範囲に収まらない場合が珍しくないことを実証し、指数算式の選択を行うには、経済学的アプローチのみでは不十分で、他のアプローチも併用すべきであるとした。CPI マニュアルもこの見解に同意し、伝統的な公理論的アプローチで最良とされる I_F 、公理論的アプロ

ーチに加え次節の連鎖指数アプローチとの関連から良いとされる I_T 、純粋物価指数の観点から最良とされる I_W (インプリシット型も含める) の3指数に関しては、実用上ほぼ差がないとしている。

しかし、PC など価格の下落率が大きい品目が含まれる最近の消費者物価では、これら3指数の差が必ずしも小さいとは言えなくなっている。そこで連鎖指数アプローチからの検討が必要となる。

連鎖指数アプローチ (ディビジア指数)

ディビジア指数は、基準時と比較時の間隔を出来るだけ短くし連鎖させるとよいことを概念的に示したものといえる。

購入額総額が物価と数量の積 ($W = PQ$) で表されるとすると、次の等式が成立する。

$$\frac{W_t}{W_0} = e^{\int_0^t d \log W_\tau} = e^{\int_0^t d \log P_\tau} e^{\int_0^t d \log Q_\tau} = \frac{P_t}{P_0} \cdot \frac{Q_t}{Q_0} \quad (8)$$

$W = \sum_i p_i q_i$ であるから次の等式も成立する。

$$\begin{aligned} \frac{W_t}{W_0} &= e^{\int_0^t \frac{dW_\tau}{W_\tau}} = e^{\sum_i \int_0^t \frac{d p_i^\tau}{p_i^\tau} d \log p_i^\tau} e^{\sum_i \int_0^t \frac{d q_i^\tau}{q_i^\tau} d \log q_i^\tau} \\ &= e^{\sum_i \int_0^t s_i^\tau d \log p_i^\tau} e^{\sum_i \int_0^t s_i^\tau d \log q_i^\tau} \end{aligned} \quad (9)$$

従って、形式的に次の対応関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{P_t}{P_0} &= e^{\sum_i \int_0^t s_i^\tau d \log p_i^\tau} = e^{\sum_i \int_0^t s_i^\tau \frac{d p_i^\tau}{p_i^\tau}} \\ \frac{Q_t}{Q_0} &= e^{\sum_i \int_0^t s_i^\tau d \log q_i^\tau} = e^{\sum_i \int_0^t s_i^\tau \frac{d q_i^\tau}{q_i^\tau}} \end{aligned} \quad (10)$$

これらをディビジア指数と呼ぶ。ディビジア指数は第2節の②を除く全ての公理を満たし、特に⑤の循環性を有する点が特徴的である。反面、ディビジア指数特有の問題に経路依存性がある。例えば、比較時の品目の価格と数量が基準時と全く同じであったとしても、一般的にディビジア指数は1にならない。しかし、ハルテンは、経済学的アプローチが前提とする最小費用で最大の効用を得るよう世帯が行動し、費用関数が一次同次であるな

らば（効用関数は不変とする）、ディビジア物価指数は理論生計費指数に（近似ではなく）一致し、従って経路独立性を満たすことを示した。これは、少なくとも比較時が基準時からそれ程経過しない範囲であれば、経路依存性の問題が無いだけでなく経済学的観点からもディビジア指数が（概念的には）最良指数に優ることを示している。

品目の価格と数量が常時観測されていることを前提としているディビジア指数は計算不可能であるため、何らかの近似法が必要となる。そこで時点 $0, 1, \dots, n$ で品目の価格及び購入量が観測されているものとして離散近似を考える。被積分項を期間 $[j, j+1]$ の左端時点の値で近似すると

$$\sum_i \int_j^{j+1} s_i^\tau \frac{dp_i^\tau}{p_i^\tau} \approx \sum_i s_i^j \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{p_i^j} = L_{j,j+1} - 1 \quad (11)$$

となる。ここで、 $L_{j,j+1}$ は基準時 j 、比較時 $j+1$ の L_L である。さらに $e^{L_{j,j+1}-1} \approx L_{j,j+1}$ と近似すると、ディビジア指数は、 L_L の連鎖 $\prod_{j=0}^{n-1} L_{j,j+1}$ になる。同様に被積分項を期間 $[j, j+1]$ の右端時点の値で近似すると I_P の連鎖指数が導出される。被積分項を次のように両端の平均で近似すると、

$$\sum_i \int_j^{j+1} s_i^\tau d \log p_i^\tau \approx \sum_i \frac{s_i^j + s_i^{j+1}}{2} \log \frac{p_i^{j+1}}{p_i^j} \quad (12)$$

(7) の I_T の連鎖指数になる。

I_F の連鎖も含めて連鎖指数は基準時固定指数よりもディビジア指数に近付き、通常互いの差が小さくなるが（連鎖ドリフトについては総合指数レベルでは特に問題とならないため説明を省略する）、 I_T 及び I_F の連鎖指数は、二階微分までディビジア指数に一致し、 L_L や I_P の連鎖指数よりも良い近似になっていると考えられる。実際の優劣の判定法は、同じ指数算式による固定基準指数と連鎖指数の差が小さいことである。これは、ディビジア指数が循環性を有するため、より良い近似であればその差が小さいと考えられるためである。CPI

マニュアルでは、品目の価格の対数値が線形に変化し、金額シェアが線形に変化する傾向があるため、 I_T は近似的に循環性を有し基準時固定指数と連鎖指数とはほぼ一致すること、 I_F 及び I_W は通常 I_T との差が小さいため、これらの指数算式についても基準時固定か連鎖かの選択は実際上問題ではないとの見解を示している。しかし、PC など価格下落率が大きい品目が含まれると、 I_T がほぼ循環性を有することは変わらないものの他の最良指数との差は連鎖指数であっても無視できるほど小さいとは必ずしも言えなくなっている。

ディビジア指数への近似度が高く循環性を近似的に有しているかが重要な問題になると、次のモンゴメリーバルティア指数 I_{D-I} と佐藤ーバルティア指数 I_{D-II} も検討に加えるべきであろう。

$$I_{D-I} = e^{\frac{L(w_i^0, w_i^t)}{\sum_i L(w_i^0, w_i^t)} \log \frac{p_i^t}{p_i^0}} \quad (13)$$

$$I_{D-II} = e^{\frac{\sum_i L(w_i^0, w_i^t)}{\sum_k L(w_k^0, w_k^t)} \log \frac{p_i^t}{p_i^0}}$$

ここで、 $L(x, y) := (x - y) / (\log x - \log y)$ if $x \neq y$, x if $x = y$ 。 I_{D-I} は次の等式を利用したディビジア指数の近似といえる。

$$\sum_i \int_j^{j+1} s_i^\tau \frac{dp_i^\tau}{p_i^\tau} = \sum_i \int_j^{j+1} \frac{d \log W_T / d W_T}{d \log w_i^\tau / d w_i^\tau} \frac{dp_i^\tau}{p_i^\tau} \quad (14)$$

I_{D-II} は最近になってバーネットらにより最良指数であることが示された。 I_{D-I} は①の比例性を満たさず最良指数ではないが、最良指数と二階微分まで一致することがディワートにより示され、準最良指数と呼ばれている。いずれも②を満たさないものの③の要素転逆テストに合格し、 I_{D-I} は、さらに、品目の副グループまで総合した指数と金額シェアから同じ算式で総合指数を二段階で算出した結果と品目レベルから直接算出した総合指数が一致するという「総合整合性」を有しており、公理論的にも I_F と遜色がないといえる。ほぼ循環性を有する

とみられる点は I_T と同様で、購入額総額が一定で、各品目の価格と金額シェアが指数関数的（対数線形）に変化するならば、 I_{D-I} は循環性を有する、金額シェアの変化が線形という想定よりも妥当か否かは自明ではないが、PC など価格下落率の大きい品目を含めた場合の筆者の試算では I_{D-I} のほうが I_T よりも循環性が高く、 I_{D-II} は I_{D-I} とほぼ一致する。ちなみに w_i^* を金額シェア s_i^* に、 W_i を 1 に置換えると、 I_{D-I} 及び I_{D-II} は循環性を完全に満たすといえるほど基準時固定指数と連鎖指数の差が非常になくなる。CPI マニュアルでは、 I_{D-I} 、 I_{D-II} について殆ど触れられていない。従来の CPI では、 I_F 、 I_W 、 I_T の 3 指数の差が小さく、さらに検討を進める必要性がないと判断したためであろうが、現在の状況をみると、ディビジア指数の近似算式に関して今後さらに研究を進めるべきであろう。

5 中間時アプローチ

最良指数は、比較時の品目ウェイトをタイムリーに得ることができないため、速報性が要請される公式統計では採用できない。CPI マニュアルでは、最良指数の近似法として比較時ウェイトが不要な中間年バスケット指数 I_M を紹介している。この指数は、ピーター・ヒルとシュルツがほぼ同時期に提案した算式で、(1)のロウ指数で中間時のバスケットを基準バスケットに用いた固定バスケット法である。基準時 2010 年、比較時 2014 年の場合 2012 年バスケット、比較時が 2015 年の場合幾つかの採り方が考えられるが例えば 2012 年と 2013 年バスケットの幾何平均をとればよい。

$$I_M = \frac{\sum_i p_i^t q_i^{t/2}}{\sum_i p_i^0 q_i^{t/2}} = \frac{\sum_i p_i^{t/2} q_i^{t/2}}{\sum_i p_i^0 q_i^{t/2}} \frac{\sum_i p_i^t q_i^{t/2}}{\sum_i p_i^{t/2} q_i^{t/2}} \quad (15)$$

(15)の最右辺に示すように、基準時から中間時の物価変動を I_P 、中間時から比較時の物価変動を I_L 算式で算出し連鎖したものになり、両算式の傾向を打

消す形式になっている。また、基準時においてディビジア指数・最良指数と二階微分まで一致する。

中間時アプローチは固定バスケット法の範囲に留まらず、次のように I_T に対する近似法にもなる。

$$I_{D-M} = e^{\sum_i s_i^{t/2} \log \frac{p_i^t}{p_i^0}} \quad (16)$$

PC など価格下落率の大きい品目が含まれる場合、(15)の算式では問題が生じる恐れがあり、日本の CPI の参考系列として採用している中間年バスケット指数は、PC などの品目を除いて(15)の算式で総合した後、除外品目と(16)の算式でさらに総合する混合式を採用している。これは、日本の CPI が固定バスケット法を原則としているためであるが、公共サービスの無料化などによって品目の価格がゼロになる可能性も考えると妥当といえるであろう（公理②参照）。なお、中間年バスケット指数は、月次系列に関して課題がある。年単位でバスケットを更新すると 12 月から翌年 1 月の間に断層が生じる問題に対する改善策が必要となる。

地デジ化後のテレビなどの価格の大幅低下と購入の落込みの同時進行が影響し、筆者の試算では 2011 年に I_P と I_L が逆転した。このように経済学のアプローチの前提は常に成立するとは限らない。しかし、公理論・ディビジア指数アプローチなどは生計費指数論とは直接的には無関係であり、このような場合でも有効であることに留意すべきであろう。

<文献>

- [1] ILO et al. (2004). *Consumer Price Index Manual: Theory and Practice*.
- [2] Barnett, W. A., and Choi, K-H (2008). Operational Identification of the Complete Class of Superlative Index Numbers: An Application of Galois Theory, *Journal of Mathematical Economics*, 44(7-8), 603-612.
- [3] 桜本 光 (1999). 望ましい経済指数とその性質－Divisia 指数と Fisher 連鎖指数－, 三田商学研究, 42(5), 91-109.